I-20-22 Roll No....................

Annual Examination, 2022

B.Sc. Part I

MATHEMATICS

Paper I

(Algebra and Trigonometry)

Time : 3 Hours] [MAXIMUM MARKS : 50

नोट : खण्ड 'अ' वस्तुनिष्ठ प्रकार का तथा अनिवार्य है। उसे उत्तर-पुस्तिका के **प्रथम पृष्ठ** पर लिखा जाये। खण्ड 'ब' लघु उत्तरीय प्रकार का और खण्ड 'स' दीर्घ उत्तरीय प्रकार का है।

Note : *Section 'A' is Objective type and is compulsory. It should be written on the* ***first page*** of Answer-book. Section 'B' is Short answer type and Section 'C' is Long answer type.

खण्ड 'अ' (Section 'A')

बहु विकल्पीय प्रश्न

(Multiple Choice Questions)

सही उत्तर का चयन कीजिए : **1×10=10**

Choose the correct answer :

(i) आव्यूह $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम है :

P.T.O.

(अ) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{7} & 1 \end{bmatrix}$ (ब) $\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$

(स) $\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (द) $\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$

Inverse of matrix $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$ is :

(a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{7} & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$

(ii) यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ हो तो A^2 के आइगेन मान होंगे :

(अ) $-1, -9, -4$ (ब) $-1, -3, 2$

(स) $1, 3, -2$ (द) $1, 9, 4$

If matrix $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ then eigen-values of A^2 are :

(a) – 1, – 9, – 4 (b) – 1, – 3, 2

(c) 1, 3, – 2 (d) 1, 9, 4

(iii) λ का मान क्या होगा, जिसके लिए समीकरणों का निकाय $3x_1 + x_2 - \lambda x_3 = 0$, $2x_1 + 4x_2 + \lambda x_3 = 0$, $8x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 0$ एक अशून्य हल रखता है ?

(अ) 1 (ब) 0

(स) – 1 (द) $\frac{1}{2}$

What will be the value of λ for which the system of equations $3x_1 + x_2 - \lambda x_3 = 0$, $2x_1 + 4x_2 + \lambda x_3 = 0$, $8x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 0$ has a non-zero solution ?

(a) 1 (b) 0

(c) – 1 (d) $\frac{1}{2}$

(iv) यदि समीकरण $2x^3 + 6x^2 + 5x + k = 0$ के मूल समान्तर श्रेणी में हों तो k का मान है :

(अ) 1 (ब) 0

(स) 2 (द) 3

If roots of the equation $2x^3 + 6x^2 + 5x + k = 0$ are in arithmetic progression, the value of k is :

(a) 1 (b) 0

(c) 2 (d) 3

(v) समूह (G, t_6) जहाँ $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ में अवयव 5 की कोटि है :

(अ) 1 (ब) 2

(स) 4 (द) 6

In the group (G, t_6) where $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ the order of element 5 is :

(a) 1 (b) 2

(c) 4 (d) 6

(vi) यदि α कोई पूर्णांक है और P कोई अभाज्य संख्या है, तब

$$\alpha^P \equiv \alpha \pmod P$$

उपर्युक्त कथन किस प्रमेय का है ?

(अ) लैग्रांज का प्रमेय (ब) आयलर का प्रमेय

(स) कैली का प्रमेय (द) फर्मा का प्रमेय

If α is an integer and P is any prime number then $\alpha^P \equiv \alpha \pmod P$.

The above statement is of which theorem ?

(a) Lagrange's theorem

(b) Euler's theorem

(c) Cayley's theorem

(d) Fermat's theorem

(vii) निकाय (I, *, ∘) एकक सहित क्रमविनिमेयी वलय है, जहाँ संक्रियांश * और '∘' पूर्णांकों के समुच्चय I में निम्नानुसार परिभाषित हैं।

$$a * b = a + b - 1$$

तथा $a \circ b = a + b - ab \quad \forall\, a, b \in \mathrm{I}$

तब इस वलय का एकक अवयव है :

(अ) 1 (ब) – 1

(स) 0 (द) 2

The system (I, *, ∘) is a commutative ring with unity, where the operations '*' and '∘' are defined in the set I of integers, as follows :

$$a * b = a + b - 1$$

$$a \circ b = a + b - ab \quad \forall\, a, b \in \mathrm{I}$$

Then unity element of this ring is :

(a) 1 (b) – 1

(c) 0 (d) 2

(viii) एक पूर्णांकीय डोमेन का अभिलाक्षणिक होता है :

(अ) सम संख्या

(ब) विषम संख्या

(स) शून्य अथवा अभाज्य संख्या

(द) भाज्य संख्या

The characteristic of an integral domain is :

(a) Even number

(b) Odd number

(c) Either O or a Prime number

(d) A divisible number

(ix) log (– 1) का मान है :

(अ) $i\pi$ (ब) $i\left(\frac{\pi}{6}\right)$

(स) $i\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (द) 0

The value of log (– 1) is :

(a) $i\pi$ (b) $i\left(\frac{\pi}{6}\right)$

(c) $i\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (d) 0

(x) $\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) =$

(अ) $\sinh^{-1} x$ (ब) $\cosh^{-1} x$

(स) $\tanh^{-1} x$ (द) $\coth^{-1} x$

$\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) =$

(a) $\sinh^{-1} x$ (b) $\cosh^{-1} x$

(c) $\tanh^{-1} x$ (d) $\coth^{-1} x$

खण्ड 'ब' (Section 'B')

लघु उत्तरीय प्रश्न **3×5=15**

(Short Answer Type Questions)

नोट— सभी **पाँच** प्रश्न अनिवार्य हैं।

Note : *All the five questions are compulsory.*

1. केवल प्रारम्भिक स्तम्भ संक्रियाओं (column operations) का उपयोग करके आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।

Use only elementary column operations to find inverse of the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

अथवा / Or

आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ की कोटि और शून्यता ज्ञात कीजिए।

Find rank and nullity of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

2. निम्नलिखित समीकरण निकाय के सभी हल ज्ञात कीजिए :

$$4x + 2y + z + 34 = 0$$
$$6x + 3y + 4z + 74 = 0$$
$$2x + y + 4 = 0$$

Find all the solutions of the following system of equations :

$$4x + 2y + z + 34 = 0$$
$$6x + 3y + 4z + 74 = 0$$
$$2x + y + 4 = 0$$

अथवा / Or

निम्नलिखित बहुपदों का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = 4x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1$$
$$g(x) = 8x^3 - 6x^2 + 5x - 2$$

Find the g.c.d. of the following polynomials :

$$f(x) = 4x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1$$
$$g(x) = 8x^3 - 6x^2 + 5x - 2$$

3. सिद्ध कीजिए कि समूह G का एक उपसमूह H प्रसामान्य होगा यदि और केवल यदि $xHx^{-1} = H$

Prove that a subgroup H of a group G is normal if and only if $xHx^{-1} = H$

अथवा / Or

चक्रीय समूह $G = \{a, a^2, a^3, a^4 = e\}$ के लिए एकैक समाकारी (अर्थात् तुल्याकारी) नियमित क्रमचय समूह ज्ञात कीजिए।

Find one-one homomorphic (*i.e.*, isomorphic) regular permutation group of the cyclic group $G = \{a, a^2, a^3, a^4 = e\}$.

4. 'समाकारिता के प्रथम प्रमेय' का कथन लिखिए तथा इसे सिद्ध कीजिए।

Write the statement of 'First theorem of Homomorphism' and prove it.

अथवा / Or

सिद्ध कीजिए कि एक समूह समाकारिता $f: G \to G'$ एक तुल्याकारिता होगी यदि और केवल यदि $\ker(f) = \{e\}$

Prove that a group homomorphism $f: G \to G'$ is an isomorphism if and only if $\ker(f) = \{e\}$

5. यदि n कोई धनात्मक पूर्णांक हो तो सिद्ध कीजिए :

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos\frac{n\pi}{4}$$

If n is any positive integer, then prove that :

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos\frac{n\pi}{4}$$

अथवा / Or

निम्नांकित श्रेणी का योगफल ज्ञात कीजिए :

$$\cos\theta - \frac{\cos 2\theta}{\underline{|2}} + \frac{\cos 3\theta}{\underline{|3}} - \frac{\cos 4\theta}{\underline{|4}} + \ldots\ldots \infty$$

Find the sum of the following series :

$$\cos\theta - \frac{\cos 2\theta}{\underline{|2}} + \frac{\cos 3\theta}{\underline{|3}} - \frac{\cos 4\theta}{\underline{|4}} + \ldots\ldots \infty$$

खण्ड 'स' (Section 'C')

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न **5×5=25**

(Long Answer Type Questions)

नोट— सभी **पाँच** प्रश्न अनिवार्य हैं।

Note : *All the five questions are compulsory.*

1. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & -12 & -6 \end{bmatrix}$ के आइगेन मानों और आइगेन सदिशों को ज्ञात कीजिए।

Find eigen values and eigen vectors of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & -12 & -6 \end{bmatrix}.$$

अथवा / Or

आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ का अभिलाक्षणिक समीकरण ज्ञात कीजिए तथा दर्शाइए कि यह समीकरण A के द्वारा संतुष्ट होता है।

A^{-1} भी ज्ञात कीजिए तथा व्यंजक $A^8 - 5A^7 + 7A^6 - 3A^5 + A^4 - 5A^3 + 8A^2 - 2A + I$ के द्वारा निरूपित आव्यूह ज्ञात कीजिए।

Find the characteristic equation of the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ and show that this equation is satisfied by A.

Also find A^{-1} and the matrix represented by the expression $A^8 - 5A^7 + 7A^6 - 3A^5 + A^4 - 5A^3 + 8A^2 - 2A + I$.

2. ज्ञात कीजिए λ के किन मानों के लिए समीकरण $x + y + z = 1$, $x + 2y + 4z = \lambda$, $x + 4y + 10z = \lambda^2$ हल रखते हैं तथा सभी स्थितियों में हल ज्ञात कीजिए।

Find out for what value of λ, the equations $x + y + z = 1$, $x + 2y + 4z = \lambda$, $x + 4y + 10z = \lambda^2$ have solutions. And solve completely in all cases.

अथवा / Or

निम्नलिखित समीकरण को फेरारी विधि से हल कीजिए :

$$x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 24x + 15 = 0$$

Solve the following equation by Ferrari's method :

$$x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 24x + 15 = 0$$

3. यदि $S = R - \{-1\}$ जहाँ R सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तथा S में एक द्विचर संक्रिया निम्नानुसार परिभाषित है :

$$a * b = a + b + ab \ \forall \ a, b \in S$$

(अ) दर्शाइए कि (S, $*$) एक समूह है।

(ब) S में समीकरण $2 * x * 3 = 7$ का हल ज्ञात कीजिए।

Let $S = R - \{-1\}$ where R is the set of all real numbers and a binary operation '$*$' is defined as below in S :

$$a * b = a + b + ab \ \forall \ a, b \in S$$

(a) Show that (S, $*$) is a group.

(b) Find the solution of the equation $2 * x * 3 = 7$ in S.

अथवा / Or

यदि G कोई समूह है तथा $a \in G$ तब :

(i) G के केन्द्र को परिभाषित कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि यह G का एक उपसमूह है।

(ii) a के प्रसामान्यक को परिभाषित कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि यह G का एक उपसमूह है।

If G is any group and $a \in G$ then :

(i) Define centre of G and prove that it is a subgroup of G.

(ii) Define Normalizer of a and prove that it is a subgroup of G.

4. निम्नलिखित को परिभाषित कीजिए और प्रत्येक का एक उदाहरण दीजिए :

(i) एकक रहित क्रमविनिमेय वलय

(ii) शून्य भाजक रहित वलय

(iii) शून्य भाजक सहित वलय

(iv) गुणन तत्समक सहित वलय

(v) विभाजन वलय

Define the following and give an example of each :

(i) Commutative Ring without unity.

(ii) Ring without zero divisor.

(iii) Ring with zero divisor.

(iv) Ring with multiplicative identity.

(v) Division Ring.

अथवा / Or

एक क्षेत्र (F, +, ·) में सिद्ध कीजिए (यदि $a, b, c, d \in F$ तथा $b \neq 0, d \neq 0$)

(i) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

(ii) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

In a field (F, +, ·) prove that (if $a, b, c, d \in F$ and $b \neq 0, d \neq 0$)

(i) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

(ii) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

5. यदि $(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) \dots (a_n + ib_n) = A + iB$ तब दर्शाइए :

(i) $(a_1^2 + b_1^2).(a_2^2 + b_2^2) \dots (a_n^2 + b_n^2) = A^2 + B^2$

(ii) $\tan^{-1}\frac{b_1}{a_1} + \tan^{-1}\frac{b_2}{a_2} + \dots + \tan^{-1}\frac{b_n}{a_n} = \tan^{-1}\frac{B}{A}$

If $(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) \dots (a_n + ib_n) = A + iB$ then show that :

(i) $(a_1^2 + b_1^2).(a_2^2 + b_2^2) \dots (a_n^2 + b_n^2) = A^2 + B^2$

(ii) $\tan^{-1}\frac{b_1}{a_1} + \tan^{-1}\frac{b_2}{a_2} + \dots + \tan^{-1}\frac{b_n}{a_n} = \tan^{-1}\frac{B}{A}$

अथवा / Or

सिद्ध कीजिए :

$$\frac{7}{1.3.5} + \frac{19}{5.7.9} + \frac{31}{9.11.19} + \ldots . \infty = 1 - \frac{\pi}{8}$$

Prove that :

$$\frac{7}{1.3.5} + \frac{19}{5.7.9} + \frac{31}{9.11.19} + \ldots . \infty = 1 - \frac{\pi}{8}$$

✪ ✪ ✪ ✪ ✪ c ✪ ✪ ✪ ✪ ✪