

I-21-22

Roll No.....

Annual Examination, 2022

B.Sc. Part I

MATHEMATICS

Paper II

(Calculus)

Time : 3 Hours]

[MAXIMUM MARKS : 50

नोट : खण्ड 'अ' वस्तुनिष्ठ प्रकार का तथा अनिवार्य है। उसे उत्तर-पुस्तिका के प्रथम पृष्ठ पर लिखा जाये। खण्ड 'ब' लघु उत्तरीय प्रकार का और खण्ड 'स' दीर्घ उत्तरीय प्रकार का है।

Note : Section 'A' is Objective type and is compulsory. It should be written on the **first page** of Answer-book. Section 'B' is Short answer type and Section 'C' is Long answer type.

खण्ड 'अ' (Section 'A')

बहुविकल्पीय प्रश्न

(Multiple Choice Questions)

सही उत्तर का चयन कीजिए—

1 × 10 = 10

Choose the correct answer :

- (i) एक फलन $f(x)$, को $x = a$ पर हटाने योग्य असंततता कहा जाता है यदि :

(अ) $f(a + 0) \neq f(a - 0)$

[2]

(ब) $f(a + 0) = f(a - 0) \neq f(a)$

(स) $f(a + 0) = f(a - 0) = f(a)$

(द) उपर्युक्त में से कोई नहीं

A function $f(x)$ is said to have the removable discontinuity at $x = a$ if :

(a) $f(a + 0) \neq f(a - 0)$

(b) $f(a + 0) = f(a - 0) \neq f(a)$

(c) $f(a + 0) = f(a - 0) = f(a)$

(d) None of the above

- (ii) e^{ax+b} का n वाँ अवकलज है :

(अ) e^{ax+b}

(ब) $a^2 e^{ax+b}$

(स) $a^n e^{ax+b}$

(द) $a^{n-1} e^{ax+b}$

n th derivative of e^{ax+b} is :

(a) e^{ax+b}

(b) $a^2 e^{ax+b}$

(c) $a^n e^{ax+b}$

(d) $a^{n-1} e^{ax+b}$

- (iii) वक्र $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1$ की y -अक्ष के समानान्तर अनंतस्पर्शियाँ होती हैं :

(अ) $x = a, x = ia$ (ब) $y = b, y = -b$

(स) $x = a, x = -a$ (द) $x = ia, x = -ia$

P.T.O.

I-21/22

[3]

The asymptotes parallel to y -axis of the curve $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1$ are :

- (a) $x = a, x = ia$ (b) $y = b, y = -b$
 (c) $x = a, x = -a$ (d) $x = ia, x = -ia$

(iv) समाकल $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ का मान होगा :

- (अ) $\frac{\pi}{2}$ (ब) $\frac{\pi}{ab}$
 (स) $\frac{\pi}{2a}$ (द) $\frac{\pi}{2ab}$

Value of $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ is :

- (a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{ab}$
 (c) $\frac{\pi}{2a}$ (d) $\frac{\pi}{2ab}$

(v) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ का मान होगा :

- (अ) $\frac{\pi}{2}$ (ब) $\frac{\pi}{8}$
 (स) $\frac{\pi}{4}$ (द) $\frac{\pi}{6}$

[4]

The value of $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ will be :

- (a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{8}$
 (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

(vi) $\int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta \cos^2 \theta d\theta$ का मान होगा :

- (अ) $\frac{\pi}{30}$ (ब) $\frac{\pi}{31}$
 (स) $\frac{\pi}{32}$ (द) इनमें से कोई नहीं

Value of $\int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta \cos^2 \theta d\theta$ is :

- (a) $\frac{\pi}{30}$ (b) $\frac{\pi}{31}$
 (c) $\frac{\pi}{32}$ (d) None of these

(vii) अवकल समीकरण $Mdx + Ndy = 0$ यथातथ होगा, यदि :

- (अ) $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ (ब) $\frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 N}{\partial x^2}$
 (स) $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ (द) इनमें से कोई नहीं

Differential equation $Mdx + Ndy = 0$ will be exact if :

- (a) $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ (b) $\frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 N}{\partial x^2}$
 (c) $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ (d) None of these

(viii) अवकल समीकरण $p = \log (px - y)$ का हल होगा :

- (अ) $y = cx$ (ब) $y = cx - e^c$
 (स) $y = cx + e^c$ (द) $y = cx + e^{-c}$

The solution of the differential equation $p = \log (px - y)$ is :

- (a) $y = cx$ (b) $y = cx - e^c$
 (c) $y = cx + e^c$ (d) $y = cx + e^{-c}$

(ix) अवकल समीकरण के लिए $\frac{d^2y}{dx^2} + P \frac{dy}{dx} + Qy = 0$, $y = e^x$ C.F का एक भाग है। यदि :

- (अ) $P + Qx = 0$ (ब) $2 + 2Px + Qx^2 = 0$
 (स) $1 - P + Q = 0$ (द) $1 + P + Q = 0$

For differential equation $\frac{d^2y}{dx^2} + P \frac{dy}{dx} + Qy = 0$, $y = e^x$ is a part of C.F. if :

- (a) $P + Qx = 0$ (b) $2 + 2Px + Qx^2 = 0$
 (c) $1 - P + Q = 0$ (d) $1 + P + Q = 0$

(x) समीकरण $(D^2 + 1) y = \cos 2x$ का विशेष समाकल होगा :

- (अ) $\frac{\cos 2x}{2}$ (ब) $\frac{-\cos 2x}{2}$
 (स) $\frac{-\cos 2x}{3}$ (द) $\frac{\cos 2x}{3}$

Particular integral of $(D^2 + 1) y = \cos 2x$ is :

- (a) $\frac{\cos 2x}{2}$ (b) $\frac{-\cos 2x}{2}$
 (c) $\frac{-\cos 2x}{3}$ (d) $\frac{\cos 2x}{3}$

खण्ड 'ब' (Section 'B')

लघु उत्तरीय प्रश्न

3×5=15

(Short Answer Type Questions)

नोट— सभी पाँच प्रश्न अनिवार्य हैं।

Note : All the five questions are compulsory.

1. सिद्ध कीजिए कि फलन :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2} - x, & x < 2 \\ 1, & x = 2 \\ x - \frac{3}{2}, & x > 2 \end{cases}$$

$x = 2$ पर असंतत है।

Prove that the function :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2} - x, & x < 2 \\ 1, & x = 2 \\ x - \frac{3}{2}, & x > 2 \end{cases}$$

is discontinuous at $x = 2$.

अथवा / Or

फलन $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)}$ का n वाँ अवकलज ज्ञात कीजिए।

Find the n th derivative of the function $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)}$.

2. वक्र $x^2y^2 = a^2(x^2 + y^2)$ की अक्षों के समानान्तर अनंतस्पर्शियों का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equations of Asymptotes parallel to co-ordinate axes to the curve $x^2y^2 = a^2(x^2 + y^2)$.

अथवा / Or

परवलय $y^2 = 4ax$ के बिन्दु (x, y) पर वक्रता त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

Find the radius of curvature at the point (x, y) to the parabola $y^2 = 4ax$.

3. समाकल $\int \cos^4 x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of $\int \cos^4 x \, dx$.

अथवा / Or

समाकल $\int \frac{1}{1+3\sin^2 x} \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

Evaluate $\int \frac{1}{1+3\sin^2 x} \, dx$.

4. हल कीजिए :

$$x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 3xy \left(\frac{dy}{dx} \right) + 2y^2 = 0$$

Solve it :

$$x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 3xy \left(\frac{dy}{dx} \right) + 2y^2 = 0$$

अथवा / Or

हल कीजिए :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$$

Solve it :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$$

5. हल कीजिए :

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 2y = 2 \cos t - 7 \sin t$$

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + 2x = 4 \cos t - 3 \sin t$$

Solve it :

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 2y = 2 \cos t - 7 \sin t$$

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + 2x = 4 \cos t - 3 \sin t$$

अथवा / Or

हल कीजिए :

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{zx} = \frac{dz}{xy}$$

Solve it :

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{zx} = \frac{dz}{xy}$$

खण्ड 'स' (Section 'C')

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

5×5=25

(Long Answer Type Questions)

नोट— सभी पाँच प्रश्न अनिवार्य हैं।

Note : All the five questions are compulsory.

$$1. \text{ यदि } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + x^2 - 16x + 20}{(x-2)^2}, & x \neq 2 \\ k, & x = 2 \end{cases} \text{ एवं } f(x),$$

x के समीकरण वास्तविक मानों के लिए संतत है तो k का मान ज्ञात कीजिए।

$$\text{If } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + x^2 - 16x + 20}{(x-2)^2}, & x \neq 2 \\ k, & x = 2 \end{cases} \text{ and } f(x) \text{ is}$$

continuous for all real values of x , then find the value of k .

अथवा / Or

टेलर प्रमेय द्वारा सिद्ध कीजिए :

$$\log(x+n) = \log n + \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + \frac{x^3}{3n^3} + \dots$$

By Taylor's theorem, prove that :

$$\log(x+n) = \log n + \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + \frac{x^3}{3n^3} + \dots$$

2. वक्र $y^3 - 5xy^2 + 8x^2y - 4x^3 - 3y^2 + 9xy - 6x^2 + 2y - 2x + 1 = 0$ की अनंतस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

Find the Asymptotes of the curve $y^3 - 5xy^2 + 8x^2y - 4x^3 - 3y^2 + 9xy - 6x^2 + 2y - 2x + 1 = 0$.

अथवा / Or

वक्र $r^n = a^n \cos n\theta$ की ध्रुव से जाने वाली वक्रता जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

Find the length of the chord of curvature through the pole of the curve $r^n = a^n \cos n\theta$.

3. सिद्ध कीजिए :

$$\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} \log \frac{1}{2}$$

Prove that :

$$\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} \log \frac{1}{2}$$

अथवा / Or

द्रव $x^2 + y^2 = a^2$ का सम्पूर्ण क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Find the complete area of the circle $x^2 + y^2 = a^2$.

4. हल कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} - y \sec x = y^2 \cos x \sin x$$

Solve it :

$$\frac{dy}{dx} - y \sec x = y^2 \cos x \sin x$$

अथवा / Or

हल कीजिए :

$$y = -px + x^4 p^2$$

Solve it :

$$y = -px + x^4 p^2$$

5. हल कीजिए :

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x(1+x) \frac{dy}{dx} + 2(1+x)y = x^3$$

Solve it :

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x(1+x) \frac{dy}{dx} + 2(1+x)y = x^3$$

अथवा / Or

हल कीजिए :

$$\frac{dx}{z(x+y)} = \frac{dy}{z(x-y)} = \frac{dz}{x^2 + y^2}$$

Solve it :

$$\frac{dx}{z(x+y)} = \frac{dy}{z(x-y)} = \frac{dz}{x^2 + y^2}$$

★ ★ ★ ★ ★ c ★ ★ ★ ★ ★