I-22-22 Roll No....................

Annual Examination, 2022

B.Sc. Part I

MATHEMATICS

Paper III

(Vector Analysis and Geometry)

Time : 3 Hours] [MAXIMUM MARKS : 50

नोट : खण्ड 'अ' वस्तुनिष्ठ प्रकार का तथा अनिवार्य है। उसे उत्तर-पुस्तिका के **प्रथम पृष्ठ** पर लिखा जाये। खण्ड 'ब' लघु उत्तरीय प्रकार का और खण्ड 'स' दीर्घ उत्तरीय प्रकार का है।

Note : *Section 'A' is Objective type and is compulsory. It* should be written on the ***first page*** of Answer-book. Section 'B' is Short answer type and Section 'C' is Long answer type.

खण्ड 'अ' (Section 'A')

बहुविकल्पीय प्रश्न

(Multiple Choice Questions)

सही उत्तर का चयन कीजिए : **1 × 10 = 10**

Choose the correct answer :

(i) यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ और $\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'$ व्युत्क्रम पद्धति के सदिश हैं तो $\vec{a} \times \vec{a}' + \vec{b} \times \vec{b}' + \vec{c} \times \vec{c}'$ का मान है :

P.T.O.

(अ) $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$ (ब) $\vec{0}$

(स) 1 (द) $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]^2$

If $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ and $\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'$ are reciprocal system of vectors, then value of $\vec{a} \times \vec{a}' + \vec{b} \times \vec{b}' + \vec{c} \times \vec{c}'$ is :

(a) $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$ (b) $\vec{0}$

(c) 1 (d) $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]^2$

(ii) किस सदिश फील्ड का एक बिन्दु P पर, एकांक सदिश $\hat{a}$ की दिशा में दिशीय अवकलज हैं :

(अ) $\frac{ds}{d\phi} = \hat{a} . \text{grad}\ \phi$ (ब) $\frac{d\phi}{ds} = \vec{a} . \text{grad}\ \phi$

(स) $\frac{d\phi}{ds} = \hat{a} . \text{grad}\ \phi$ (द) $\frac{ds}{d\phi} = \vec{a} . \text{grad}\ \phi$

The directional derivative of a scalar field at a point P in the direction of a unit vector $\hat{a}$ is :

(a) $\frac{ds}{d\phi} = \hat{a} . \text{grad}\ \phi$ (b) $\frac{d\phi}{ds} = \vec{a} . \text{grad}\ \phi$

(c) $\frac{d\phi}{ds} = \hat{a} . \text{grad}\ \phi$ (d) $\frac{ds}{d\phi} = \vec{a} . \text{grad}\ \phi$

(iii) यदि S कोई संवृत पृष्ठ हो, जो एक आयतन V को घेरता है तथा $F = xi + 2yj + 3zk$, तो $\iint_S F.n\, dS$ है :

(अ) V (ब) 2V

(स) 4V (द) 6V

If S is any closed surface enclosing a volume V and $F = xi + 2yj + 3zk$, then $\iint_S F.n\, dS$ is :

(a) V (b) 2V

(c) 4V (d) 6V

(iv) स्टोक्स प्रमेय के अनुसार $\oint_C F.dr$ का मान है :

(अ) $\iint_S n.\text{div } F\, dS$ (ब) $\iint_S n.\text{curl } F\, dS$

(स) $\iiint_V n.\text{div } F\, dV$ (द) $\iiint_V n.\text{curl } F\, dV$

The value of $\oint_C F.dr$ by Stoke's theorem is :

(a) $\iint_S n.\text{div } F\, dS$ (b) $\iint_S n.\text{curl } F\, dS$

(c) $\iiint_V n.\text{div } F\, dV$ (d) $\iiint_V n.\text{curl } F\, dV$

(v) शांकव की उत्क्रेन्द्रता (e) निम्न सम्बन्ध से प्राप्त होता है :

(अ) $\sqrt{1-\frac{r_2^2}{r_1^2}}$ (ब) $\sqrt{1+\frac{r_1^2}{r_2^2}}$

(स) $\sqrt{1-\frac{r_1^2}{r_2^2}}$ (द) $\sqrt{1+\frac{r_2^2}{r_1^2}}$

Eccentricity (e) of conic is given by relation :

(a) $\sqrt{1-\frac{r_2^2}{r_1^2}}$ (b) $\sqrt{1+\frac{r_1^2}{r_2^2}}$

(c) $\sqrt{1-\frac{r_1^2}{r_2^2}}$ (d) $\sqrt{1+\frac{r_2^2}{r_1^2}}$

(vi) व्यापक रूप में दो शांकव कितने बिन्दुओं (वास्तविक या अधिकल्पित) में प्रतिच्छेद करते हैं :

(अ) 1 (ब) 2

(स) 3 (द) 4

Two conics in general, intersect in how many points (real or imaginary) :

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 4

(vii) गोलों $x^2 + y^2 + z^2 + 2u_1x + 2v_1y + 2w_1z + d_1 = 0$ और $x^2 + y^2 + z^2 + 2u_2x + 2v_2y + 2w_2z + d_2 = 0$ के लम्बकोणिक प्रतिच्छेदन के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध है :

(अ) $2u_1u_2 + 2v_1v_2 + 2w_1w_2 = d_1 + d_2$

(ब) $2u_1u_2 + 2v_2v_1 + 2d_1d_2 = w_1 + w_2$

(स) $2u_1u_2 + 2v_1v_2 + 2d_1d_2 = w_1 + w_2$

(द) $2u_1v_2 + 2v_2v_1 + 2w_1w_2 = d_1 + d_2$

The necessary and sufficient condition for the spheres $x^2 + y^2 + z^2 + 2u_1x + 2v_1y + 2w_1z + d_1 = 0$ and $x^2 + y^2 + z^2 + 2u_2x + 2v_2y + 2w_2z + d_2 = 0$ to intersect orthogonally is :

(a) $2u_1u_2 + 2v_1v_2 + 2w_1w_2 = d_1 + d_2$

(b) $2u_1u_2 + 2v_2v_1 + 2d_1d_2 = w_1 + w_2$

(c) $2u_1u_2 + 2v_1v_2 + 2d_1d_2 = w_1 + w_2$

(d) $2u_1v_2 + 2v_2v_1 + 2w_1w_2 = d_1 + d_2$

(viii) गोले $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 8z - 45 = 0$ का केन्द्र और त्रिज्या है :

(अ) (4, 2, 4); 9 (ब) (– 4, 2, 4); 9

(स) (4, – 2, – 4); 9 (द) (4, – 2, 4); 9

Centre and radius of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 8z - 45 = 0$ is :

(a) (4, 2, 4); 9 (b) (– 4, 2, 4); 9

(c) (4, – 2, – 4); 9 (d) (4, – 2, 4); 9

(ix) शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ द्विपृष्ठ अतिपरवलयज कहलाता है, यदि गुणांक :

(अ) a, b, c तीनों धन हैं।

(ब) a, b, c में से कोई एक ऋण है।

(स) a, b, c में कोई दो ऋण हैं।

(द) a, b, c तीनों ऋण हैं।

The conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ is called a hyperboloid of two sheets, if the coefficients :

(a) all the three a, b, c are positive

(b) any one of a, b, c is negative

(c) any two of a, b, c are negative

(d) all the three a, b, c are negative

(x) विविक्तकर त्रिघात के दो भिन्न-भिन्न मूलों के संगत मुख्य दिशाएँ होती हैं :

(अ) समकोणिक (ब) बराबर

(स) समानान्तर (द) इनमें से कोई नहीं

The principal directions corresponding to two distinct roots of the discriminating cubic are :

(a) at right angles (b) equal

(c) parallel (d) none of these

खण्ड 'ब' (Section 'B')

लघु उत्तरीय प्रश्न **3×5=15**

(Short Answer Type Questions)

नोट— सभी **पाँच** प्रश्न अनिवार्य हैं।

Note : *All the five questions are compulsory.*

1. सिद्ध कीजिए कि चार बिन्दुओं A (4, 5, 1), B (0, – 1, – 1), C (3, 9, 4) और D (– 4, 4, 4) समतलीय हैं।

Prove that the four points A (4, 5, 1), B (0, – 1, – 1), C (3, 9, 4) and D (– 4, 4, 4) are coplanar.

अथवा / Or

एक कण वक्र $x = 3 \sin t$, $y = 3 \cos t$, $z = 8t$ पर गतिमान हो तो उसका वेग और त्वरण $t = 0$ तथा $t = \frac{\pi}{4}$ पर ज्ञात कीजिए।

A particle moves along the curve $x = 3 \sin t$, $y = 3 \cos t$, $z = 8t$, then find velocity and acceleration at $t = 0$ and $t = \frac{\pi}{4}$.

2. $\int_C F.dr$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ $F = zi + xj + yk$ तथा C वक्र $r = \cos t\, i + \sin t\, j + tk$ का $t = 0$ से $t = 2\pi$ तक चाप है।

Evaluate $\int_C F.dr$ where $F = zi + xj + yk$ and C is the arc of the curve $r = \cos t\, i + \sin t\, j + tk$ from $t = 0$ to $t = 2\pi$.

अथवा / Or

$\iint_S F.n\, dS$ का मान निकालिए, जहाँ $F = 4xzi - y^2 j + yzk$ तथा S से घन का पृष्ठ है जो कि समतलों $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$ से घिरा हुआ है।

Evaluate $\iint_S F.n\, dS$ where $F = 4xzi - y^2 j + yzk$ and S is the surface of the cube bounded by planes $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$.

3. सिद्ध कीजिए कि प्रतिबन्ध की सरल रेखा $\frac{l}{r} = A \cos\theta + B \sin\theta$ शांकव $\frac{l}{r} = 1 + e \cos(\theta - \alpha)$ को स्पर्श करे, $A^2 + B^2 - 2e (A \cos\alpha + B \sin\alpha) + e^2 - 1 = 0$ है।

Prove that the condition that the line $\frac{l}{r} = A \cos\theta + B \sin\theta$ may touch the conic $\frac{l}{r} = 1 + e \cos(\theta - \alpha)$ is $A^2 + B^2 - 2e (A \cos\alpha + B \sin\alpha) + e^2 - 1 = 0$.

अथवा / Or

सिद्ध कीजिए कि वृत्त $x^2 + y^2 + 2ax + c = 0$ तथा $x^2 + y^2 + 2by + c = 0$ एक-दूसरे को स्पर्श करते हैं, यदि $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c}$

Prove that the circles $x^2 + y^2 + 2ax + c = 0$ and $x^2 + y^2 + 2by + c = 0$ touch eac other if $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c}$

4. वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 8z - 45 = 0$, $x - 2y + 2z = 3$ का केन्द्र और त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

Find the centre and radius of the circle $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 8z - 45 = 0,\ x - 2y + 2z = 3.$

अथवा / Or

उस लम्ब वृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए। जिसका निर्देशांक वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ x - y + z = 3$ है।

Find the equation of right circular cylinder whose guiding circle is $x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ x - y + z = 3.$

5. दर्शाइए कि अतिपरवलयज के एक ही निकाय के दो जनक अप्रतिच्छेदी होते हैं।

Show that no two generators of the same systems intersect.

अथवा / Or

शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ सापेक्ष, सरल रेखाओं $\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$ तथा $\frac{x-\alpha'}{l'} = \frac{y-\beta'}{m'} = \frac{z-\gamma'}{n'}$ को ध्रुवी रेखाएँ होने के प्रतिबन्धों को ज्ञात कीजिए।

Find the conditions that the lines $\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$ and $\frac{x-\alpha'}{l'} = \frac{y-\beta'}{m'} = \frac{z-\gamma'}{n'}$ are polar lines with respect to the conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$.

खण्ड 'स' (Section 'C')

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न **5×5=25**

(Long Answer Type Questions)

नोट— सभी **पाँच** प्रश्न अनिवार्य हैं।

Note : *All the five questions are compulsory.*

1. फलन $\phi = x^2 - y^2 + 2z^2$ की दिशीय अवकलज बिन्दु P (1, 2, 3) पर रेखा PQ की दिशा में ज्ञात कीजिए, जहाँ Q का निर्देशांक (5, 0, 4) है।

Evaluate the directional derivation of the function $\phi = x^2 - y^2 + 2z^2$ at the point P (1, 2, 3) in the direction of the line PQ where Q has coordinates (5, 0, 4).

अथवा / Or

निम्नलिखित सदिशों के व्युत्क्रम पद्धति के सदिश ज्ञात कीजिए :

$$2i + 3j - k,\ i - j - 2k,\ -i + 2j + 2k$$

Find the reciprocal system of vectors to the set of vectors :

$$2i + 3j - k,\ i - j - 2k,\ -i + 2j + 2k$$

2. स्टोक्स प्रमेय का सत्यापन कीजिए :

$$\iint_S \text{curl } F.n\, dS = \oint_C F.dr$$

जहाँ $F = y^2 i + x^2 j - (x + z)k$ तथा C त्रिभुज की परिसीमा है, जिसके शीर्ष (0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0) हैं तथा इसे दक्षिणवर्ती अभिविन्यास की दिशा में लिया गया है।

Verify Stoke's theorem :

$$\iint_S \text{curl } F.n\, dS = \oint_C F.dr$$

where $F = y^2 i + x^2 j - (x + z)k$ and C is the boundary of the triangle C whose vertices are (0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0) and is take in the sense of right handed orientation.

अथवा / Or

गॉउस के डाइवर्जेन्स प्रमेय से $\iint_S F.n\, dS$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ $F = 4x\hat{i} - 2y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ तथा क्षेत्र S, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ और $z = 3$ से परिबद्ध है।

Evaluate $\iint_S F.n\, dS$ with the help of Gauss's divergence theorem for $F = 4x\hat{i} - 2y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ taken over the region S bounded by $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ and $z = 3$.

3. निम्नलिखित शांकव का अनुरेखण कीजिए तथा उसकी नाभियों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए :

$$8x^2 - 4xy + 5y^2 - 16x - 14y + 17 = 0$$

Trace the following conic and find the coordinates of its foci :

$$8x^2 - 4xy + 5y^2 - 16x - 14y + 17 = 0$$

अथवा / Or

शांकव $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ के दो बिन्दुओं 'α' और 'β' को मिलाने वाली जीवा का ध्रुवीय समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the polar equation of the chord joining two points 'α' and 'β' on the conic $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$.

4. उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसका शीर्ष (1, 2, 3) और आधार वक्र, वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x + y + z = 1$ है।

Find the equation of the cone whose vertex is (1, 2, 3) and base curve is the circle $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x + y + z = 1$.

अथवा / Or

गोलों $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2z + 6 = 0$ और $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 2z + 6 = 0$ द्वारा निर्धारित समाक्ष निकाय के सीमान्त बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए।

Find the limiting points of the coaxal system of spheres determined by $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2z + 6 = 0$ and $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 2z + 6 = 0$.

5. समीकरण का समानयन प्रमाणिक रूप में कीजिए :

$$2x^2 - 7y^2 + 2z^2 - 10yz - 8zx - 10xy + 6x + 12y - 6z + 5 = 0$$

Reduce the equation to the standard form :

$$2x^2 - 7y^2 + 2z^2 - 10yz - 8zx - 10xy + 6x + 12y - 6z + 5 = 0$$

अथवा / Or

दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ का समतल $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ द्वारा प्रतिच्छेद का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Find the area of the section of the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ by the plane $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

✪ ✪ ✪ ✪ ✪ c ✪ ✪ ✪ ✪ ✪