I/49—22 Roll No. .....

Annual Examination, 2022

B.Sc. Part II

MATHEMATICS

Paper I

(Advance Calculus)

Time : 3 Hours] [MAXIMUM MARKS : 50

नोट : खण्ड 'अ' वस्तुनिष्ठ प्रकार का तथा अनिवार्य है। उसे उत्तर-पुस्तिका के **प्रथम पृष्ठ** पर लिखा जाये। खण्ड 'ब' लघु उत्तरीय प्रकार का और खण्ड 'स' दीर्घ उत्तरीय प्रकार का है।

Note : *Section 'A' is Objective type and is compulsory. It should be written on the **first page** of Answer-book. Section 'B' is Short answer type and Section 'C' is Long answer type.*

खण्ड 'अ' (Section 'A')

बहुविकल्पीय प्रश्न

(Multiple Choice Questions)

सही उत्तर चुनिए— **1×10=10**

Choose the correct answer :

1. यदि श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ के सभी पद धनात्मक हों तथा $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, तब $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ है—

(अ) अपसारी (ब) अभिसारी (स) दोलनी (द) इनमें से कोई नहीं।

P.T.O.

If all terms of the series $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ are positive and $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, the series $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ is :

(a) divergent (b) convergent

(c) oscillatory (d) none of these.

2. असत्य कथन को चुनिए—

(अ) प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम एक कौशी अनुक्रम होता है

(ब) प्रत्येक परिबद्ध अनुक्रम का एक सीमा बिन्दु होता है

(स) प्रत्येक कौशी अनुक्रम परिबद्ध होता है

(द) प्रत्येक परिबद्ध अनुक्रम अभिसारी होता है।

Choose the incorrect statement :

(a) Every convergent sequence is a Cauchy sequence

(b) Every bounded sequence has a limit point

(c) Every Cauchy sequence is bounded

(d) Every bounded sequence is convergent.

3. फलन f सभी वास्तविक संख्याओं के लिए इस प्रकार परिभाषित है—

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + kx - 3, & x \leq 1 \\ 3x + b, & x > 1 \end{cases}$$

k और b के किन मानों के लिए फलन f सतत् और अवकलनीय दोनों होगा ?

(अ) $k = -1, b = -3$ (ब) $k = 1, b = 3$

(स) $k = 1, b = 4$ (द) $k = -1, b = 6$

The function f is defined on all real numbers such that :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + kx - 3, & x \le 1 \\ 3x + b, & x > 1 \end{cases}$$

For which of the following values of k and b will the function f be both continuous and differentiable ?

(a) $k = -1, b = -3$ (b) $k = 1, b = 3$

(c) $k = 1, b = 4$ (d) $k = -1, b = 6$.

4. फलन $f(x) = |x-3|$ के लिए $[1, 4]$ पर मध्यमान प्रमेय लागू नहीं होता, क्योंकि—

(अ) फलन $f(x)$, $[1, 4]$ पर सतत् नहीं है

(ब) फलन $f(x)$, $[1, 4]$ पर अवकलनीय नहीं है

(स) $f(1) \neq f(4)$

(द) $f(1) > f(4)$

The mean value theorem does not apply to the function $f(x) = |x-3|$ on $[1, 4]$ because :

(a) $f(x)$ is not continuous on $[1, 4]$

(b) $f(x)$ is not differentiable on $[1, 4]$

(c) $f(1) \neq f(4)$

(d) $f(1) > f(4)$.

5. यदि फलन $f(x, y)$ के लिए $f_y = 3x^2y - y^3$ तब निम्नलिखित में से कौन-सा $f(x, y)$ का मान संभव है ?

(अ) $x^2y^3 - 3y^2$

(ब) $\frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{1}{4}y^4x$

(स) $\frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{1}{4}y^4e^x$

(द) $\frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{1}{4}y^4 + e^x$

If for the function $f(x, y)$, $f_y = 3x^2y - y^3$ which of the following is the possible value of $f(x, y)$:

(a) $x^2y^3 - 3y^2$ (b) $\frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{1}{4}y^4x$

(c) $\frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{1}{4}y^4e^x$ (d) $\frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{1}{4}y^4 + e^x$.

6. यदि $(x, y) \to (0, 0)$ सरल रेखा $y = x$ के अनुदिश तब

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - 2y^2}{3x^2 + y^4} = ?$

(अ) 0 (ब) $\frac{-2}{3}$

(स) $\frac{1}{3}$ (द) $\frac{-1}{3}$

If $(x, y) \to (0, 0)$ along the line $y = x$ then $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - 2y^2}{3x^2 + y^4} = ?$

(a) 0 (b) $\frac{-2}{3}$

(c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{-1}{3}$.

7. यदि $f(x, y) = 1 + 2x + 8y - x^2 - 2y^2$

(अ) f का मान (1, 2) पर अधिकतम है

(ब) f का मान (1, – 2) पर अधिकतम है

(स) f का मान (1, 2) पर न्यूनतम है

(द) f का मान (1, – 2) पर न्यूनतम है।

If $f(x, y) = 1 + 2x + 8y - x^2 - 2y^2$

(a) The value of f is maximum at (1, 2)

(b) The value of f is maximum at (1, – 2)

(c) The value of f is minimum at (1, 2)

(d) The value of f is minimum at (1, – 2).

8. सरल रेखा कुल $y = mx + \frac{a}{m}$ जहाँ m एक प्राचल है का एन्वेलप है—

(अ) परवलय (ब) अतिपरवलय

(स) दीर्घवृत्त (द) साइक्लोइड।

The envelope of the family of straight lines $y = mx + \frac{a}{m}$ where m being a parameter is :

(a) Parabola (b) Hyperbola

(c) Ellipse (d) Cycloid.

9. सही संबंध चुनिए—

(अ) $\lceil(n+1) = \int_0^\infty e^{-y^{\frac{1}{n}}} dy$ (ब) $\lceil n \lceil(n-1) = \frac{\pi}{\cos n\pi}$

(स) $\left\lceil\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\pi}\right.$ (द) $\lceil n = \int_0^1 (\log y)^{n-1} dy$.

Choose the correct relation :

(a) $\lceil(n+1) = \int_0^\infty e^{-y^{\frac{1}{n}}} dy$

(b) $\lceil n \lceil(n-1) = \frac{\pi}{\cos n\pi}$

(c) $\left\lceil\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\pi}\right.$

(d) $\lceil n = \int_0^1 (\log y)^{n-1} dy$.

10. समाकलन $\int_1^a \int_1^b \frac{dx\,dy}{xy}$ का मान है—

(अ) log a log b (ब) log a + log b

(स) log (ab) (द) log a – log b.

The value of the integral $\int_1^a \int_1^b \frac{dx\,dy}{xy}$ is :

(a) log a log b (b) log a + log b

(c) log (ab) (d) log a – log b.

खण्ड 'ब' (Section 'B')

लघु उत्तरीय प्रश्न **3×5=15**

(Short Answer Type Questions)

नोट—सभी **पाँच** प्रश्न अनिवार्य हैं।

Note : *All the* ***five*** *questions are compulsory.*

1. सिद्ध कीजिए वास्तविक संख्याओं का अनुक्रम $\{n^{\frac{1}{n}}\}$, 1 की ओर अभिसरित होता है।

Prove that the sequence $\{n^{\frac{1}{n}}\}$ of real numbers converges to 1.

अथवा / Or

श्रेणी $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{4}} + \ldots$ के अभिसारिता का परीक्षण कीजिए।

Test the convergence of the series $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{4}} + \ldots$

2. फलन $f(x) = \sqrt{x}, x \in [0, 1]$ के एकसमान अभिसारिता का संवृत अंतराल [0, 1] पर परीक्षण कीजिए।

Test the uniform continuity of the function $f(x) = \sqrt{x}, x \in [0, 1]$ on the closed interval [0, 1].

अथवा / Or

दर्शाइए कि फलन $f(x) = |x|^3, x \in R; x = 0$ पर अवकलनीय है तथा $f'(0) = 0$.

Show that the function $f(x) = |x|^3; x \in R$ is differentiable at $x = 0$ and $f'(0) = 0$.

3. यदि $f : R^2 \to R$ परिभाषित है

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^6}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \quad , & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

तब ज्ञात कीजिए—

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$$

Let $f : R^2 \to R$ is defined by

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^6}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \quad , & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

then find :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$$

अथवा / Or

सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित फलन मूल बिन्दु पर सतत् है—

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\dfrac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \quad , & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Prove that the following function is continuous at origin :

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\dfrac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \quad , & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

4. वृत्तकुल $(x - \alpha)^2 + y^2 = 4\alpha$ का एन्वेलप ज्ञात कीजिए।

Find the envelope of family of circles $(x - \alpha)^2 + y^2 = 4\alpha$.

अथवा / Or

फलन $u = xy + \dfrac{a^3}{x} + \dfrac{a^3}{y}$ का उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

Find the maximum or minimum values of the function $u = xy + \dfrac{a^3}{x} + \dfrac{a^3}{y}$.

5. मान ज्ञात कीजिए— $\int_0^a \dfrac{x^3}{\sqrt{a - x}}\,dx.$

Evaluate : $\int_0^a \dfrac{x^3}{\sqrt{a - x}}\,dx.$

अथवा / Or

सिद्ध कीजिए— $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x}\,dx = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$

Prove that : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x}\,dx = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$

खण्ड 'स' (Section 'C')

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न **5×5=25**

(Long Answer Type Questions)

नोट—सभी **पाँच** प्रश्न अनिवार्य हैं।

Note : *All the* ***five*** *questions are compulsory.*

1. समाकल परीक्षण के द्वारा श्रेणी $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$ के अभिसारिता का परीक्षण कीजिए।

Examine by integral test, the convergence of the series $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$.

अथवा / Or

श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ के अभिसारिता एवं निरपेक्ष अभिसारिता का परीक्षण कीजिए।

Examine the convergence and absolute convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$.

2. टेलर प्रमेय का कथन लिखिए एवं उसे सिद्ध कीजिए।

State and prove Taylor's theorem.

अथवा / Or

फलन $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ का अन्तराल [2, 4] के लिए लैग्रांज के मध्यमान प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

Verify Lagrange's mean value theorem for the function $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ in the interval [2, 4].

3. यदि $u = x\phi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$ सिद्ध कीजिए—

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

If $u = x\phi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$ prove that :

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

अथवा / Or

यदि $u = x^2 + y^2 + z^2$, $v = x + y + z$, $w = xy + yz + zx$ दर्शाइए कि जैकोबियन $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 0$ तथा u, v और w के बीच संबंध ज्ञात कीजिए।

If $u = x^2 + y^2 + z^2$, $v = x + y + z$, $w = xy + yz + zx$; show that Jacobian : $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 0$. Find relation between u, v and w.

4. किसी त्रिभुज ABC में $\cos A \operatorname{Cos} B \cos C$ का उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

In any triangle ABC, find the maximum and minimum value of $\cos A \operatorname{Cos} B \cos C$.

अथवा / Or

वक्र $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ के इवाल्यूट का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of evolute of the curve $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

5. $\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ समाकलन क्षेत्र V, एक बेलन है जो पृष्ठों $z = 0$, $z = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ से परिबद्ध है।

Evaluate $\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$

Where the region of integration V is cylinder, which is bounded by following surfaces $z = 0$, $z = 1$, $x^2 + y^2 = 4$.

अथवा / Or

समाकलन के क्रम में परिवर्तन करके समाकलन $\int_0^\infty \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y}\,dx\,dy$ का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of the integral $\int_0^\infty \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y}\,dx\,dy$ by changing the order of integral.

✪ ✪ ✪ ✪ ✪ c ✪ ✪ ✪ ✪ ✪