I/50—20 Roll No. ....

Annual Examination, 2022

B.Sc. Part II

MATHEMATICS

Paper II

(Differential Equations)

Time : 3 Hours] [MAXIMUM MARKS : 50

नोट : खण्ड 'अ' वस्तुनिष्ठ प्रकार का तथा अनिवार्य है। उसे उत्तर-पुस्तिका के **प्रथम पृष्ठ** पर लिखा जाये। खण्ड 'ब' लघु उत्तरीय प्रकार का और खण्ड 'स' दीर्घ उत्तरीय प्रकार का है।

Note : *Section 'A' is Objective type and is compulsory. It should be written on the* ***first page*** of Answer-book. Section 'B' is Short answer type and Section 'C' is Long answer type.

खण्ड 'अ' (Section 'A')

बहुविकल्पीय प्रश्न

(Multiple Choice Questions)

सही उत्तर चुनिए— **1×10=10**

Choose the correct answer :

(i) एक अवकल समीकरण फुक्सियन (Fuchsian) कहलाता है, यदि इसकी सभी विशिष्टताएँ होंगी—

(अ) अनियमित

(ब) नियमित

(स) नियमित एवं अनियमित दोनों

(द) उपर्युक्त में से कोई नहीं।

P.T.O.

A differential equation is called Fuchsian if all its singularities are :

(a) irregular

(b) regular

(c) both regular and irregular

(d) none of the above.

(ii) $\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)]$ का मान होगा—

(अ) $x^{n-1}J_n(x)$ (ब) $x^{n+1}J_n(x)$

(स) $x^n J_{n-1}(x)$ (द) $x^n J_{n+1}(x)$.

The value of $\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)]$ is :

(a) $x^{n-1}J_n(x)$ (b) $x^{n+1}J_n(x)$

(c) $x^n J_{n-1}(x)$ (d) $x^n J_{n+1}(x)$.

(iii) L (sin at) का मान होगा—

(अ) $\frac{p}{p^2+a^2}$ (ब) $\frac{a}{p^2-a^2}$

(स) $\frac{a}{\sqrt{p^2-a^2}}$ (द) $\frac{a}{p^2+a^2}$

The value of L (sin at) is :

(a) $\frac{p}{p^2+a^2}$ (b) $\frac{a}{p^2-a^2}$

(c) $\frac{a}{\sqrt{p^2-a^2}}$ (d) $\frac{a}{p^2+a^2}$

(iv) यदि $N(t)$, t का एक फलन इस प्रकार है कि $\int_0^t N(t)dt = 0, \forall\ t > 0$ तब $N(t)$ कहलाता है—

(अ) शून्य फलन

(ब) इकाई फलन

(स) चरघातांकी फलन

(द) आवर्ती फलन।

If $N(t)$ is a function of t such that $\int_0^t N(t)dt = 0, \forall\ t > 0$ then $N(t)$ is called :

(a) Null function

(b) Unit function

(c) Exponential function

(d) Periodic function.

(v) $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$ से स्वेच्छ फलन f को विलोपित करने पर प्राप्त आंशिक अवकल समीकरण होगा—

(अ) $px + qy = 0$ (ब) $px - qy = 0$

(स) $p^2x + q^2y = 0$ (द) $px^2 + qy^2 = 0$

Obtain the partial differential equation by eleminating the arbitrary function of form $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$ is :

(a) $px + qy = 0$ (b) $px - qy = 0$

(c) $p^2x + q^2y = 0$ (d) $px^2 + qy^2 = 0$.

(vi) अवकल समीकरण $z = px + qy + pq$ का विचित्र हल होगा—

(अ) $z = xy$ (ब) $z = \frac{x}{y}$

(स) $z = \frac{-x}{y}$ (द) $z = -xy$

Singular solution of the differential equation $z = px + qy + pq$ is :

(a) $z = xy$ (b) $z = \frac{x}{y}$

(c) $z = \frac{-x}{y}$ (d) $z = -xy$.

(vii) समीकरण $y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x\frac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0$ है—

(अ) द्वितीय कोटि का रैखिक

(ब) प्रथम कोटि का अरैखिक

(स) द्वितीय कोटि का अरैखिक

(n) iFke dksV dkjS[kd A

Equation $y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x\frac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0$ is :

(a) linear of second order

(b) non-linear of first order

(c) non-linear of second order

(d) linear of first order.

(viii) समीकरण $r - a^2 t = x^2$ का विशिष्ट समाकल होगा—

(अ) $\frac{x^4}{12}$ (ब) $\frac{a^2 x^2}{12}$

(स) $\frac{x^2}{24}$ (द) $\frac{x^4}{6}$

Particular Integral of equation $r - a^2 t = x^2$ is :

(a) $\frac{x^4}{12}$ (b) $\frac{a^2 x^2}{12}$

(c) $\frac{x^2}{24}$ (d) $\frac{x^4}{6}$.

(ix) फलनक $I[y(x)]$ के कोणांक फलन $y(x)$ का विचरण δy बराबर होता है—

(अ) $y(x) + y_1(x)$ (ब) $y_1(x) - y(x)$

(स) $y(x) - y_1(x)$ (द) $y(x) - 2y_1(x)$

The variation δy of angle function $y(x)$ of the functional $I[y(x)]$ is equal :

(a) $y(x) + y_1(x)$ (b) $y_1(x) - y(x)$

(c) $y(x) - y_1(x)$ (d) $y(x) - 2y_1(x)$.

(x) चरमानी वक्र $y = y(x)$ पर $F_y - \frac{dFy'}{dx} = 0$ कहलाता है—

(अ) जैकोबी समीकरण

(ब) यूलर समीकरण

(स) लीजेन्ड्रे समीकरण

(द) यूलर-ऑस्ट्रोग्रैडस्की समीकरण।

$F_y - \frac{dFy'}{dx} = 0$ on the extremizing curve $y = y(x)$ is called :

(a) Jacobi equation

(b) Euler equation

(c) Legendre equation

(d) Euler Ostrogradsky equation.

खण्ड 'ब' (Section 'B')

लघु उत्तरीय प्रश्न **5×3=15**

(Short Answer Type Questions)

नोट—सभी **पाँच** प्रश्न अनिवार्य हैं।

Note : *All the* ***five*** *questions are compulsory.*

1. $\int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx)\,dx = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ सिद्ध कीजिए—

Prove that : $\int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx)\,dx = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

अथवा / Or

दर्शाइए कि $P_n(x) = 0$ के सभी मूल वास्तविक हैं तथा – 1 और + 1 के बीच स्थित हैं।

Show that all the roots of $P_n(x) = 0$ are real, and lie between – 1 and + 1.

2. $L\left\{\int_0^t \dfrac{\sin x}{x}\,dx\right\}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of $L\left\{\int_0^t \dfrac{\sin x}{x}\,dx\right\}$.

अथवा / Or

हल कीजिए : $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y = 0, y = 1, Dy = 0$ जब $t = 0$.

Solve : $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y = 0, y = 1, Dy = 0$, when $t = 0$.

3. यदि $z = f(x+ay) + \phi(x-ay)$ है तो सिद्ध कीजिए—

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

If $z = f(x+ay) + \phi(x-ay)$, then prove that :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

अथवा / Or

पूर्ण हल ज्ञात कीजिए : $pq = xy$.

Find the complete integral : $pq = xy$.

4. समीकरण $(1-x^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + (1-y^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial z}{\partial x} + 3x^2 y \dfrac{\partial z}{\partial y} - 2z = 0$ का वर्गीकरण कीजिए।

Classify the equation :

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + (1-y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial z}{\partial x} + 3x^2 y \frac{\partial z}{\partial y} - 2z = 0$$

अथवा / Or

हल कीजिए— $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = xy$

Solve : $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = xy$

5. फलनक $I[y(x)] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2)\, dx, y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ का चरममान परीक्षण कीजिए।

Test for extremum the functional

$$I[y(x)] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2)\, dx, y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

अथवा / Or

फलनक $I[y(x)] = \int_0^{\log 2} (e^{-x} y'^2 - e^x y^2) dx$ के चरम ज्ञात करने की समस्या में निर्देशांक रूपान्तरण के अन्तर्गत यूलर समीकरण की निश्चिता का सत्यापन कीजिए।

Verify invariance of Euler's equation under co-ordinates transformation in the problem of finding the externals of the functional

$$I[y(x)] = \int_0^{\log 2} (e^{-x} y'^2 - e^x y^2) dx$$

खण्ड 'स' (Section 'C')

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न **5×5=25**

(Long Answer Type Questions)

नोट—सभी **पाँच** प्रश्न अनिवार्य हैं।

Note : *All the* ***five*** *questions are compulsory.*

1. $J_n(x)$ के लिए जनक फलन प्राप्त कीजिए।

Find the generating function for $J_n(x)$.

अथवा / Or

दर्शाइए कि $(1 - 2xz + z^2)^{-1/2}$ समीकरण $z \frac{\partial^2 (zv)}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{(1 - x^2)\frac{\partial v}{\partial x}\right\} = 0$ का एक हल है।

Show that $(1 - 2xz + z^2)^{-1/2}$ is a solution of the equation $z \frac{\partial^2 (zv)}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{(1 - x^2)\frac{\partial v}{\partial x}\right\} = 0$.

2. संवलन प्रमेय की सहायता से सिद्ध कीजिए—

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Using convolution theorem, prove that :

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

अथवा / Or

निम्नलिखित फलन का लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात कीजिए—

$$e^t \cosh 3t$$

Find Laplace transformation of the following function :

$$e^t \cosh 3t$$

3. हल कीजिए— $(x^2 - yz)\,p + (y^2 - zx)q = (z^2 - xy)$

Solve : $(x^2 - yz)\,p + (y^2 - zx)q = (z^2 - xy)$

अथवा / Or

चारपिट विधि से पूर्ण हल कीजिए— $z^2 = pqxy$

Solve completely by Charpit's method : $z^2 = pqxy$

4. मोन्गे विधि से हल कीजिए— $r = a^2t$

Solve by Monge's method : $r = a^2t$

अथवा / Or

हल कीजिए— $(D^2 + DD' + D' - 1)z = \sin(x + 2y)$

Solve : $(D^2 + DD' + D' - 1)z = \sin(x + 2y)$

5. फलनक : $I[y(x)] = \int_0^1 [y(x) + 2y'(x)]dx,\ y(x) \in C'[0, 1],$ वक्र $y_0(x) = x$ पर प्रथम कोटि के सामीप्य के अर्थ में संतत है। सिद्ध कीजिए।

Show that the functional :

$I[y(x)] = \int_0^1 [y(x) + 2y'(x)]dx,\ y(x) \in C'[0, 1]$, is continuous on the curve $y_0(x) = x$ is sense of first order proximity.

अथवा / Or

दो बिन्दुओं (x_1, y_1) और (x_2, y_2) को मिलाने वाले लघुत्तम वक्र को ज्ञात कीजिए।

Find the shortest curve Joining two points (x_1, y_1) and (x_2, y_2).

✪ ✪ ✪ ✪ ✪ c ✪ ✪ ✪ ✪ ✪