I-77/22 Roll No...................

Annual Examination, 2022

B.Sc. Part III

MATHEMATICS

Paper I

(Analysis)

Time : 3 Hours] [MAXIMUM MARKS : 50

नोट : खण्ड 'अ' वस्तुनिष्ठ प्रकार का तथा अनिवार्य है। उन्हें उत्तर-पुस्तिका के **प्रथम पृष्ठ** पर लिखा जाये। खण्ड 'ब' लघु उत्तरीय प्रकार का और खण्ड 'स' दीर्घ उत्तरीय प्रकार का है।

Note : *Section 'A' is Objective type and is compulsory. It should be written on the* ***first page*** of Answer-book. Section 'B' is Short answer type and Section 'C' is Long answer type.

खण्ड 'अ' (Section 'A')

बहुविकल्पीय प्रश्न **1×10=10**

(Multiple Choice Questions)

सही उत्तर चुनिए—

Choose the correct answer :

(i) यदि $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$, तब $\sum a_n$ अभिसारी है यदि—

(अ) $\alpha < 1$ (ब) $\alpha > 1$

(स) $\alpha = 1$ (द) $\alpha = 0$

If $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$, then $\sum a_n$ is convergent if :

(a) $\alpha < 1$ (b) $\alpha > 1$

(c) $\alpha = 1$ (d) $\alpha = 0$

(ii) यदि $f(x) = \dfrac{\pi}{2\sinh\pi} e^x, -\pi < x < \pi,$ तब $\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx =$

(अ) 0 (ब) 1

(स) – 1 (द) π

If $f(x) = \dfrac{\pi}{2\sinh\pi} e^x, -\pi < x < \pi,$ then $\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx =$

(a) 0 (b) 1

(c) – 1 (d) π

(iii) यदि $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ अन्तराल $[a, b]$ का कोई विभाजन है तथा $f(x) = k \ \forall \ x \in [a, b]$, तब $U(P, f) =$

(अ) $b - a$ (ब) 0

(स) $k(b-a)$ (द) k

If $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ is a partition of the interval $[a, b]$ and $f(x) = k \; \forall \; x \in [a, b]$, then $U(P, f) =$

(a) $b - a$ (b) 0

(c) $k(b - a)$ (d) k

(iv) समाकल $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$ अभिसारी है, यदि—

(अ) $n < 1$ (ब) $n = 1$

(स) $n > 1$ (द) $n \geq 1$

Integral $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$ is convergent, if :

(a) $n < 1$ (b) $n = 1$

(c) $n > 1$ (d) $n \geq 1$

(v) $\arg\left(\frac{1-i}{1+i}\right) =$

(अ) $\frac{\pi}{4}$ (ब) $-\frac{\pi}{4}$

(स) $\frac{\pi}{2}$ (द) $-\frac{\pi}{2}$

$\arg\left(\frac{1-i}{1+i}\right) =$

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $-\frac{\pi}{4}$

(c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $-\frac{\pi}{2}$

(vi) यदि $\omega = T_1(z) = \frac{z+1}{z+3}$, तब $T_1^{-1}(\omega) =$

(अ) $\frac{3\omega - 1}{\omega - 1}$ (ब) $\frac{1 - 3\omega}{\omega - 1}$

(स) $\frac{-2\omega}{\omega - 1}$ (द) $\frac{2\omega}{\omega - 1}$

If $\omega = T_1(z) = \frac{z+1}{z+3}$, then $T_1^{-1}(\omega) =$

(a) $\frac{3\omega - 1}{\omega - 1}$ (b) $\frac{1 - 3\omega}{\omega - 1}$

(c) $\frac{-2\omega}{\omega - 1}$ (d) $\frac{2\omega}{\omega - 1}$

(vii) यदि (R, d^*) एक तुच्छ दूरीक समष्टि हो तथा $A = [0, 1]$, $B = [1, 2]$, तब $D(A, B) =$

(अ) 1 (ब) 2

(स) 0 (द) 3

If (R, d^*) is a trivial metric space and $A = [0, 1]$, $B = [1, 2]$, then $D(A, B) =$

(a) 1 (b) 2

(c) 0 (d) 3

(viii) $\log_3 2$ है, एक—

(अ) परिमेय संख्या (ब) अपरिमेय संख्या

(स) पूर्णांक संख्या (द) प्राकृतिक संख्या

$\log_3 2$ is, a/an :

(a) Rational number

(b) Irrational number

(c) Integer

(d) Natural number

(ix) सामान्य दूरीक समष्टि (R, d) में यदि $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$, तब $(\bar{A})^\circ =$

(अ) R (ब) A

(स) ϕ (द) $\bar{A}$

In usual metric space (R, d), if $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$, then $(\bar{A})^\circ =$

(a) R (b) A

(c) ϕ (d) $\bar{A}$

(x) सामान्य दूरीक समष्टि (R, d) में निम्नलिखित में से कौन संहत है ?

(अ) $\{1, 2, 3, \ldots, 2021\}$

(ब) N

(स) $Q \cap [0, 2]$

(द) $\{1\} \cup \left[2, \frac{5}{2}\right] \cup \left[3, \frac{10}{3}\right] \cup \left[4, \frac{17}{4}\right] \cup \ldots\ldots$

In usual metric space (R, d) which of the following is compact ?

(a) $\{1, 2, 3, \ldots, 2021\}$

(b) N

(c) $Q \cap [0, 2]$

(d) $\{1\} \cup \left[2, \frac{5}{2}\right] \cup \left[3, \frac{10}{3}\right] \cup \left[4, \frac{17}{4}\right] \cup \ldots\ldots$

खण्ड 'ब' (Section 'B')

लघु उत्तरीय प्रश्न **5×3=15**

(Short Answer Type Questions)

नोट— सभी **पाँच** प्रश्न अनिवार्य हैं।

Note : *All the **five** questions are compulsory.*

1. यदि $a > 0$ तथा $b > 0$, सिद्ध कीजिए कि $\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(am + bn)\phi}$ अभिसारी है $p > 2$ के लिए।

If $a > 0$ and $b > 0$, prove that $\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(am + bn)\phi}$ converges for $p > 2$.

अथवा / Or

फलन $f(x) = x, -\pi < x < \pi$, के लिए फूरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए।

Find Fourier series for the function

$$f(x) = x, -\pi < x < \pi.$$

2. $f(x) = x, g(x) = e^x$ लेकर $[-1, 1]$ में व्यापक प्रथम माध्यमान प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

Taking $f(x) = x,\ g(x) = e^x$ verify the generalized first mean value theorem in $[-1, 1]$.

अथवा / Or

दर्शाइये कि समाकल $\int_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ अभिसारी है।

Show that the integral $\int_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ is convergent.

3. दर्शाइये कि फलन $f(z) = \sqrt{|xy|}$ मूल बिन्दु पर विश्लेषिक नहीं है।

Show that the function $f(z) = \sqrt{|xy|}$ is not analytic at the origin.

अथवा / Or

दर्शाइये कि प्रतिचित्रण $\omega = \sqrt{z}$ वृत्तों के कुल $|z-1| = \lambda$ को लेम्नीस्केट $|\omega-1|\ |\omega+1| = \lambda$ के कुल में रूपान्तरित करता है।

Show that the mapping $\omega = \sqrt{z}$ transforms the family of circles $|z-1| = \lambda$ into the family of lemniscates $|\omega-1|\ |\omega+1| = \lambda$?

4. माना कि (X, d) एक दूरीक समष्टि है तथा $A \subset X$, तब दर्शाइये कि $A^\circ \subset A \subset \bar{A}$.

Let (X, d) be a metric space and $A \subset X$, Then show that $A^\circ \subset A \subset \bar{A}$.

अथवा / Or

यदि $r\ (\neq 0)$ एक परिमेय संख्या है तथा x एक अपरिमेय संख्या है, तब सिद्ध कीजिए कि $r + x$ तथा rx एक अपरिमेय संख्या है।

If $r\ (\neq 0)$ is rational and x is irrational, then prove that $r + x$ and rx are irrational.

5. सिद्ध कीजिए कि एक दूरीक समष्टि विलगीय है, यदि और केवल यदि यह द्वितीय गणनीय है।

Prove that a metric space is separable iff it is second countable.

अथवा / Or

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक पूर्णतः परिबद्ध दूरीक समष्टि परिबद्ध है।

Prove that every totally bounded metric space is bounded.

खण्ड 'स' (Section 'C')

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न **5×5=25**

(Long Answer Type Questions)

नोट— सभी **पाँच** प्रश्न अनिवार्य हैं।

Note : *All the* ***five*** *questions are compulsory.*

1. यंग के प्रमेय का कथन लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Young's theorem.

अथवा / Or

आवर्ती फलन $f(x)$ का फूरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए, जहाँ

$$f(x) = \begin{cases} -\pi, & \text{जब} \quad -\pi < x < 0 \\ x, & \text{जब} \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$$

अत: निगमित कीजिए कि $\dfrac{\pi^2}{8} = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \dots$

Find the Fourier series of the periodic function $f(x)$, where $f(x) = \begin{cases} -\pi, & \text{when} \quad -\pi < x < 0 \\ x, & \text{when} \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$

Hence deduce that $\dfrac{\pi^2}{8} = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \dots$.

2. डाबू के प्रमेय का कथन लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Darboux's theorem.

अथवा / Or

दर्शाइये कि $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^a - 1}{\log x}\, dx = \log(1 + a)\ (a > -1)$.

Show that $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^a - 1}{\log x}\, dx = \log(1 + a)\ (a > -1)$.

3. किसी फलन $f(z)$ के वैश्लेषिक होने के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove the necessary condition for $f(z)$ to be analytic.

अथवा / Or

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक मूवियस रूपान्तरण जिसका केवल एक नियत बिन्दु α हो को $\dfrac{1}{w - z} = \dfrac{1}{z - \alpha} + \lambda$ के रूप में रखा जा सकता है।

Prove that every Mobius transformation which has only one fixed point α can be put in the form $\dfrac{1}{w - z} = \dfrac{1}{z - \alpha} + \lambda$.

4. माना कि (X, d) एक दूरीक समष्टि है। दर्शाइये कि फलन

$d^* : X \times X \to R$ जो $d^*(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$

द्वारा परिभाषित है, X पर एक परिबद्ध दूरीक है।

Let (X, d) be a metric space. Show that the function $d^* : X \times X \to R$ defined by $d^*(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$ is a bounded metric on X.

अथवा / Or

सिद्ध कीजिए कि परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q पूर्णक्रमित नहीं है।

Prove that the set of rational numbers Q is not order-complete.

5. सिद्ध कीजिए कि किसी दूरीक समष्टि (X, d) में निम्नलिखित कथन तुल्य हैं—

(i) X सम्बद्ध है

(ii) X अनुक्रमणीय सम्बद्ध है

(iii) X को BWP है

(iv) X पूर्णतः परिबद्ध एवं पूर्ण है

(v) परिमित सर्वनिष्ठ गुणधर्म (*f.i.p.*) वाले X के प्रत्येक संवृत्त उपसमुच्चयों के संग्रह का सर्वनिष्ठ अरिक्त है।

Prove that in a metric space (X, d) following statements are equivalent :

(i) X is compact

(ii) X is sequentially compact

(iii) X has the BWP

(iv) X is totally bounded and complete

(v) Every collection of closed subsets of X having *f.i.p.* has non-empty intersection.

अथवा / Or

माना (X, d) एक दूरीक समष्टि है तथा माना $\{A_\alpha : \alpha \in \wedge\}$ X के सम्बद्ध उपसमुच्चयों का एक कुल है, इस प्रकार कि $\bigcap_{\alpha \in \wedge} A_\alpha \neq \phi$, तब सिद्ध कीजिए कि $\bigcup_{\alpha \in \wedge} A_\alpha$ सम्बद्ध है।

Let (X, d) be a metric space and let $\{A_\alpha : \alpha \in \wedge\}$ be a family of connected subsets of X such that $\bigcap_{\alpha \in \wedge} A_\alpha \neq \phi$. Then prove that $\bigcup_{\alpha \in \wedge} A_\alpha$ is connected.

✪ ✪ ✪ ✪ ✪ c ✪ ✪ ✪ ✪ ✪