G-20-20 Roll No..................

Annual Examination, 2020

B.Sc. Part I

MATHEMATICS

Paper I

(Algebra and Trigonometry)

Time : 3 Hours] [MAXIMUM MARKS : 50

नोट : खण्ड 'अ' वस्तुनिष्ठ प्रकार का तथा अनिवार्य है। उन्हें उत्तर-पुस्तिका के **प्रथम पृष्ठ** पर लिखा जाये। खण्ड 'ब' लघु उत्तरीय प्रकार का और खण्ड 'स' दीर्घ उत्तरीय प्रकार का है।

Note : *Section 'A' is Objective type and is compulsory. It should be written on the* ***first page*** of Answer-book. Section 'B' is Short answer type and Section 'C' is Long answer type.

खण्ड 'अ' (Section 'A')

बहुविकल्पीय प्रश्न

(Multiple Choice Questions)

रिक्त स्थानों की पूर्ति करें— **1×10=10**

Fill in the blanks :

(i) प्रारम्भिक आव्यूह का व्युत्क्रम एक .... होता है।

The inverse of an elementary matrix is an

....

(ii) यदि किसी आव्यूह का केवल एक ही स्तम्भ हो, तो वह .... कहलाता है।

If a matrix has only one column, then it is called a ....

(iii) nवीं घात का एक समीकरण .... मूल रखता है।

An equation of the nth degree has .... roots.

(iv) एक समीकरण जो x को $\frac{1}{x}$ में परिवर्तित करने पर अपरिवर्तित रहता है एक .... कहलाता है।

An equation which remains unaltered by changing x into $\frac{1}{x}$ is called a ....

(v) सम्बन्ध $R = \{(x, y) : x, y \in N$ तथा $x + y = 8\}$, तो R का डोमेन = {.............}.

Relation $R = \{(x, y) : x, y \in N$ and $x + y = 8\}$, then domain of R = {..........}.

(vi) यदि a का प्रतिलोम a^{-1} है, तो a^{-1} का प्रतिलोम .... होता है।

If the inverse of an element a in a group is a^{-1}, then the inverse of a^{-1} is ....

(vii) एक समूह G का समूह G में समाकारिता .... कहलाता है।

A homomorphism of G into itself is called .... of G.

(viii) एक वलय R .... कहलाता है यदि R के दो शून्येतर अवयवों का गुणनफल शून्य नहीं है।

A ring R is .... if multiplication of two non-zero element in R is not zero.

(ix) यदि n कोई धन पूर्णांक हो, तो—

$$(\sin \theta + i \cos \theta)^n = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

If n is any positive integer, then :

$$(\sin \theta + i \cos \theta)^n = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

(x) मान बताइए— $\log(-1) = \ldots\ldots\ldots\ldots$.

Find the value of : $\log(-1) = \ldots\ldots\ldots\ldots$.

खण्ड 'ब' (Section 'B')

लघु उत्तरीय प्रश्न **3×5=15**

(Short Answer Type Questions)

नोट— सभी **पाँच** प्रश्न अनिवार्य हैं। 100 शब्दों में उत्तर दीजिए।

Note : *All the **five** questions are compulsory. Answer within 100 words.*

1. दर्शाइए कि R^3 का उपसमुच्चय $\{(3, 4, -1), (1, 2, 0), (1, 0, -1)\}$ रैखिकत: परतंत्र है।

Show that the subset {(3, 4, −1), (1, 2, 0), (1, 0, − 1)} of R^3 is linearly dependent.

अथवा / Or

सिद्ध कीजिए किसी आव्यूह के भिन्न-भिन्न आइगेन मानों के संगत आइगेन सदिश रैखिकत: स्वतन्त्र होते हैं।

Prove that the eigen vectors corresponding to distinct eigen values of a matrix are linearly independent.

2. यदि समीकरण $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ के दो मूलों का योग तीसरे मूल के बराबर हो, तो सिद्ध कीजिए—

$$p^3 - 4pq + 8r = 0.$$

If the sum of two roots is equal to third root of the equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, then prove that $p^3 - 4pq + 8r = 0$.

अथवा / Or

यदि α, β, γ त्रिघात $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ के मूल हैं, तो समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल $\beta\gamma + \frac{1}{\alpha}, \gamma\alpha + \frac{1}{\beta}, \alpha\beta + \frac{1}{\gamma}$ हैं।

If α, β, γ are the roots of the cubic $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, find the equation whose roots are $\beta\gamma + \frac{1}{\alpha}, \gamma\alpha + \frac{1}{\beta}, \alpha\beta + \frac{1}{\gamma}$.

3. यदि $f : X \rightarrow Y$ और $g : Y \rightarrow Z$ एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण है, तो सिद्ध कीजिए कि $gof : X \rightarrow Z$ भी एकैकी आच्छादक है।

If $f : X \rightarrow Y$ and $g : Y \rightarrow Z$ be one-one onto mappings, then prove that the mapping gof : $X \rightarrow Z$ is also one-one onto.

अथवा / Or

सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G के दो अवयवों के गुणनफल का प्रतिलोम उनके प्रतिलोमों का उल्टे क्रम के गुणनफल के बराबर होता है।

Prove that the inverse of the product of two elements of group is the product of the inverses taken in the reverse order.

4. सिद्ध कीजिए एक चक्रीय समूह का प्रत्येक तुल्यकारी प्रतिचित्रण पुनः चक्रीय समूह होता है।

Prove that isomorphic image of a cyclic group is also cyclic group.

अथवा / Or

सिद्ध कीजिए सभी पूर्णांकों का समुच्चय I साधारण योग तथा गुणन के संयोजनों के रूप में वलय होता है।

Prove that set of all integers I is a ring with the compositions of addition and multiplication.

5. यदि $x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta$, तो सिद्ध कीजिए कि—

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\theta.$$

If $x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta$, then prove that :

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\theta.$$

अथवा / Or

सिद्ध कीजिए कि—

$$\tan\left(i\log\frac{a-ib}{a+ib}\right) = \frac{2ab}{a^2-b^2}.$$

Prove that :

$$\tan\left(i\log\frac{a-ib}{a+ib}\right) = \frac{2ab}{a^2-b^2}.$$

खण्ड 'स' (Section 'C')

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न **5×5=25**

(Long Answer Type Questions)

नोट— सभी **पाँच** प्रश्न अनिवार्य हैं। 300 शब्दों में उत्तर दीजिए।

Note : *All the **five** questions are compulsory. Answer within 300 words.*

1. निम्न आव्यूह को प्रसामान्य रूप में बदलिए और इसकी जाति ज्ञात कीजिए—

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Find the normal form of the following matrix and find its rank :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

अथवा / Or

दर्शाइए कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ कैले हेमिल्टन प्रमेय को संतुष्ट करते हैं।

Show that matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ satisfy Cayley-Hamilton theorem.

2. आव्यूह विधि से हल कीजिए—

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9,$$

$$x + 2x_2 + 2x_3 = 6,$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 8.$$

Solve by Matrix method :

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9,$$
$$x + 2x_2 + 2x_3 = 6,$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 8.$$

अथवा / Or

दकार्ते विधि द्वारा समीकरण $x^4 - 3x^2 - 42x - 40 = 0$ को हल कीजिए।

Solve the equation $x^4 - 3x^2 - 42x - 40 = 0$ by Descarte's Method.

3. लैग्रांज प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Lagrange's Theorem.

अथवा / Or

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक चक्रीय समूह एक आबेली समूह होता है।

Prove that energy cyclic group is an abelion group.

4. सिद्ध कीजिए सभी समूहों के समुच्चय में तुल्यकारिता का सम्बन्ध तुल्यता सम्बन्ध होता है।

Prove that the relation of isomorphic in the set of all groups is an equivalance relation.

अथवा / Or

सिद्ध कीजिए प्रत्येक क्षेत्र एक पूर्णांकीय प्रान्त होता है।

Prove that every field is integral domain.

5. यदि $\tan(\alpha + i\beta) = x + iy$, तो सिद्ध कीजिए—

(i) $x^2 + y^2 + 2x \cot 2\alpha = 1$,

(ii) $x^2 + y^2 - 2y \coth 2\beta + 1 = 0$.

If $\tan(\alpha + i\beta) = x + iy$, then prove that :

(i) $x^2 + y^2 + 2x \cot 2\alpha = 1$,

(ii) $x^2 + y^2 - 2y \coth 2\beta + 1 = 0$.

अथवा / Or

सिद्ध कीजिए—

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3^2} + \frac{1}{7^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3^5} + \frac{1}{7^5}\right) - \ldots..$$

Prove that :

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3^2} + \frac{1}{7^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3^5} + \frac{1}{7^5}\right) - \ldots..$$

✪ ✪ ✪ ✪ ✪ c ✪ ✪ ✪ ✪ ✪