G-49-20

Roll No....................

Annual Examination, 2020

B.Sc. Part II

MATHEMATICS

Paper I

(Advanced Calculus)

Time : 3 Hours] [MAXIMUM MARKS : 50

नोट : खण्ड 'अ' वस्तुनिष्ठ प्रकार का तथा अनिवार्य है। उन्हें उत्तर-पुस्तिका के **प्रथम पृष्ठ** पर लिखा जाये। खण्ड 'ब' लघु उत्तरीय प्रकार का और खण्ड 'स' दीर्घ उत्तरीय प्रकार का है।

Note : *Section 'A' is Objective type and is compulsory. It should be written on the* ***first page*** *of Answer-book. Section 'B' is Short answer type and Section 'C' is Long answer type.*

खण्ड 'अ' (Section 'A')

बहुविकल्पीय प्रश्न

(Multiple Choice Questions)

सही उत्तर चुनिए— **1×10=10**

Choose the correct answer :

1. अनुक्रम {1, –1, 1, – 1, ...} का 20वां पद है—

(अ) 1 (ब) – 1 (स) 0 (द) ∞.

20th term of the sequence {1, – 1, 1, – 1, ...} is :

(a) 1 (b) – 1 (c) 0 (d) ∞.

P.T.O.

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+3}$ का मान है—

(अ) 0 (ब) 1 (स) 2 (द) ∞.

Value of $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+3}$ is :

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) ∞.

3. यदि फलन $f(x) = (1 + x)^{1/x}$, $x = 0$ पर संतत हो, तो $f(0)$ का मान होगा—

(अ) 0 (ब) e (स) $\frac{1}{e}$ (द) 1.

If function $f(x) = (1 + x)^{1/x}$, is continuous at $x = 0$, then value of $f(0)$ is :

(a) 0 (b) e (c) $\frac{1}{e}$ (d) 1.

4. फलन $f(x)=\frac{1}{x}$ है—

(अ) वृद्धिमान (ब) ह्रासमान

(स) अचर (द) इनमें से कोई नहीं।

Function $f(x)=\frac{1}{x}$ is :

(a) Increasing (b) Decreasing

(c) Constant (d) None of these.

5. फलन $f(x,y)=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ का घात होगा—

(अ) 1 (ब) 0 (स) 2 (द) – 1.

The degree of the function $f(x,y)=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ is :

(a) 1 (b) 0 (c) 2 (d) – 1.

6. यदि $u=\sin\frac{x}{y}$, तब $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$ का मान है—

(अ) u (ब) $2u$ (स) 0 (द) 1.

If $u=\sin\frac{x}{y}$, then value of $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$ is :

(a) u (b) $2u$ (c) 0 (d) 1.

7. किसी वक्र के वक्रता केन्द्र के बिन्दुपथ को कहते हैं—

(अ) अन्वालोप (ब) वक्रता

(स) केन्द्रज (द) इनमें से कोई नहीं।

The locus of the center of the curvature of any curve is called :

(a) Envelope (b) Curvature

(c) Evolute (d) None of these.

8. कोई बिन्दु (a, b) एक फलन $f(x, y)$ का पल्याण बिन्दु होगा यदि—

(अ) $rt - s^2 = 0$ (ब) $rt - s^2 < 0$

(स) $rt - s^2 > 0$ (द) $r = s = t = 0$.

Any point (a, b) of a function $f(x, y)$ is a saddle point if :

(a) $rt - s^2 = 0$ (b) $rt - s^2 < 0$

(c) $rt - s^2 > 0$ (d) $r = s = t = 0$.

9. $\Gamma n \, \Gamma(1-n)$ का मान है—

(अ) $\beta(n, 1)$ (ब) $\beta(n, 1-n)$

(स) $\beta(n, 1-2n)$ (द) $\beta(1-n, 1+n)$.

Value of $\Gamma n \, \Gamma(1-n)$ is :

(a) $\beta(n, 1)$ (b) $\beta(n, 1-n)$

(c) $\beta(n, 1-2n)$ (d) $\beta(1-n, 1+n)$.

10. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ का मान है—

(अ) π (ब) $\sqrt{\pi}$ (स) $\frac{\pi}{2}$ (द) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Value of $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ is :

(a) π (b) $\sqrt{\pi}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

खण्ड 'ब' (Section 'B')

लघु उत्तरीय प्रश्न **3×5=15**

(Short Answer Type Questions)

नोट—सभी **पाँच** प्रश्न अनिवार्य हैं।

Note : *All the* ***five*** *questions are compulsory.*

1. निम्नलिखित श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए—

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+....+\frac{1}{2n+1}+.... .$$

Test the convergence of the following series :

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+....+\frac{1}{2n+1}+.... .$$

अथवा / Or

दर्शाइए कि— $\lim_{n\to\infty} n^{1/n}=1.$

Show that : $\lim_{n\to\infty} n^{1/n}=1.$

2. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = |x|$, $x = 0$ पर संतत है, किन्तु $x = 0$ पर अवकलनीय नहीं है।

Prove that the function $f(x) = |x|$ is continuous at $x = 0$, but not differentiable at $x = 0$.

अथवा / Or

दर्शाइए कि एक सम फलन का अवकलज सदैव एक विषम फलन होता है।

Show that the derivative of an even function is always an odd function.

3. दर्शाइए कि फलन

$$f(x,y) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{y}, & \text{जब } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad , & \text{जब } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

मूलबिन्दु (0, 0) पर संतत है।

Show that the function

$$f(x,y) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{y}, & \text{when } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad , & \text{when } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

is continuous at the origin (0, 0).

अथवा / Or

यदि u, x और y का n घातीय समघात फलन है, तो

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (n-1)\frac{\partial u}{\partial x}.$$

If u is a homogeneous function of nth degree of x and y, then

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(n-1)\frac{\partial u}{\partial x}.$$

4. समीकरण $x^2 \sin\alpha + y^2 \cos\alpha = a^2$ से निरूपित वक्रकुल के अन्वालोप का समीकरण ज्ञात कीजिए, जहाँ α प्राचल है।

Find the equation of the envelopes of the family of curves $x^2 \sin\alpha + y^2 \cos\alpha = a^2$, where α is parameter.

अथवा / Or

फलन $u = x^2 + y^2 + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}$ के उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मानों को ज्ञात कीजिए।

Find the maximum or minimum value of the function $u = x^2 + y^2 + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}$.

5. सिद्ध करो— $\beta(m,n)=\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}dx.$

Prove that : $\beta(m,n)=\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}dx.$

अथवा / Or

मान ज्ञात करो— $\int_0^1 \int_2^5 \int_4^5 e^{xy} \, dx \, dy \, dz.$

Find the vlaue of $\int_0^1 \int_2^5 \int_4^5 e^{xy} \, dx \, dy \, dz.$

खण्ड 'स' (Section 'C')

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न **5×5=25**

(Long Answer Type Questions)

नोट—सभी **पाँच** प्रश्न अनिवार्य हैं।

Note : *All the* ***five*** *questions are compulsory.*

1. प्रत्येक कौशी अनुक्रम परिबद्ध होता है परन्तु इसका विलोम सत्य नहीं है।

Every Cauchy sequence is bounded but the converse is not true.

अथवा / Or

ज्ञात कीजिए कि श्रेणी

$$x + \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{3^3 x^3}{3!} + \frac{4^4 x^4}{4!} + \ldots, x > 0$$

अभिसारी है या अपसारी ?

Find the series

$$x+\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{3^3x^3}{3!}+\frac{4^4x^4}{4!}+\ldots, x>0$$

is convergent or divergent.

2. फलन $f(x) = \tan x$ के लिए रोले प्रमेय का सत्यापन कीजिए, जहाँ $0 \le x \le \pi$.

Verify Rolle's theorem for the function $f(x) = \tan x$, where $0 \le x \le \pi$.

अथवा / Or

कौशी के मध्यमान प्रमेय से ξ का मान $[a, b]$ में निम्नलिखित फलनों के लिए ज्ञात कीजिए—

$$f(x) = e^x, \phi(x) = e^{-x}.$$

By the Cauchy's Mean Value theorem find the value of ξ in $[a, b]$ for the following functions :

$$f(x) = e^x, \phi(x) = e^{-x}.$$

3. यदि $u = \log\dfrac{x^4+y^4}{x+y}$, तो आयलर प्रमेय से सिद्ध कीजिए कि $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=3$.

If $u = \log\dfrac{x^4+y^4}{x+y}$, then prove that by the Euler's theorem $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=3$.

अथवा / Or

यदि $y_1 = \cos x_1$, $y_2 = \sin x_1 \cos x_2$ और $y_3 = \sin x_1 \sin x_2 \cos x_3$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि—

$$\frac{\partial(y_1, y_2, y_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = -\sin^3 x_1 \sin^2 x_2 \sin x_3.$$

If $y_1 = \cos x_1$, $y_2 = \sin x_1 \cos x_2$ and $y_3 = \sin x_1 \sin x_2 \cos x_3$, then prove that :

$$\frac{\partial(y_1, y_2, y_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = -\sin^3 x_1 \sin^2 x_2 \sin x_3.$$

4. फलन $u = x^2 + y^2 + z^2$ का निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए, जहाँ दिया गया है $ax + by + cz = p$.

Find the minimum value of the function $u = x^2 + y^2 + z^2$, where given $ax + by + cz = p$.

अथवा / Or

फलन $u = xyz$ का उच्चिष्ठ मान ज्ञात कीजिए यदि $x + y + z = 1$.

Find the maximum value of the function $u = xyz$, if $x + y + z = 1$.

5. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dy\, dx$ का मान निकालिए।

Find the value of $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dy\, dx$.

अथवा / Or

निम्नलिखित समाकल का क्रम बदलिए—

$$\int_0^{2a} \int_{x^2/4a}^{3a-x} f(x,y)\, dx\, dy.$$

Change the order of integration of the following integral :

$$\int_0^{2a} \int_{x^2/4a}^{3a-x} f(x,y)\, dx\, dy.$$

✪ ✪ ✪ ✪ ✪ c ✪ ✪ ✪ ✪ ✪