I-78/22 Roll No....................

Annual Examination, 2022

B.Sc. Part III

MATHEMATICS

Paper II

(Abstrct Algebra)

Time : 3 Hours] [MAXIMUM MARKS : 50

नोट : खण्ड 'अ' वस्तुनिष्ठ प्रकार का तथा अनिवार्य है। उन्हें उत्तर-पुस्तिका के **प्रथम पृष्ठ** पर लिखा जाये। खण्ड 'ब' लघु उत्तरीय प्रकार का और खण्ड 'स' दीर्घ उत्तरीय प्रकार का है। सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

Note : *Section 'A' is Objective type and is compulsory. It should be written on the **first page** of Answer-book. Section 'B' is Short answer type and Section 'C' is Long answer type. All questions are compulsory.*

खण्ड 'अ' (Section 'A')

बहुविकल्पीय प्रश्न **1×10=10**

(Multiple Choice Questions)

सही उत्तर चुनिए—

Choose the correct answer :

(i) यदि H, K किसी समूह G के कोई दो उपसमूह हों तो HK भी समूह G का एक उपसमूह होगा, यदि और केवल यदि ....

(अ) $H^2 = K$ (ब) $HK = KH$

(स) $H = K^2$ (द) $HH = KK$

If H, K are any two subgroup of any group G, then HK will also be a subgroup of group G if and only if ....

(a) $H^2 = K$ (b) $HK = KH$

(c) $H = K^2$ (d) $HH = KK$

(ii) माना G कोई समूह है, तब G पर सम्बन्ध '~' एक संयुग्मी सम्बन्ध कहलाता है, यदि $a, b \in G$ के लिए $\exists\, c \in G$ इस प्रकार है कि ....

(अ) $a = c^{-1}\, bc$ (ब) $c = a^{-1}\, b^{-1}$

(स) $c^{-1} = ab$ (द) $c = a^2b^2$

Let G be a group, then the relation '~' on G is called a conjugate relation if $a, b \in G$, then $\exists\, c \in G$ such that ....

(a) $a = c^{-1}\, bc$ (b) $c = a^{-1}\, b^{-1}$

(c) $c^{-1} = ab$ (d) $c = a^2b^2$

(iii) समूह G का एक उपसमूह, H प्रसामान्य उपसमूह होता है, यदि और केवल यदि ....

(अ) N (G) = H (ब) N (GG) = H

(स) N (H) = G (द) N (HH) = GGG

H is a normal subgroup of a group G, if and only if ....

(a) N (G) = H (b) N (GG) = H

(c) N (H) = G (d) N (HH) = GGG

(iv) यदि बहुपद $f(x)$ को $(x - a)$ से भाग दिया जाये तो शेषफल .... होगा।

(अ) $f(a)$ (ब) $f(x)$

(स) $(-a)$ (द) $(-x)$

If polynomial $f(x)$ is divided by $(x - a)$ then the remainder will be ....

(a) $f(a)$ (b) $f(x)$

(c) $(-a)$ (d) $(-x)$

(v) यदि $f(x) = 3x^0 + 4x + 2x^3$ तथा $g(x) = 2x^0 + 3x + 4x^2 + 5x^3$ तब $f(x) + g(x)$ की घात होगी—

(अ) 2 (ब) 3

(स) 5 (द) 4

If $f(x) = 3x^0 + 4x + 2x^3$ and $g(x) = 2x^0 + 3x + 4x^2 + 5x^3$, then the degree of $f(x) + g(x)$ will be :

(a) 2 (b) 3

(c) 5 (d) 4

(vi) सदिश समष्टि V(F) का अरिक्त उपसमुच्चय W सदिश उपसमष्टि होगा। यदि और केवल यदि ....

(अ) $a, b \in F; \alpha, \beta \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$

(ब) $a, b \in F; \alpha, \beta \in W \Rightarrow (ab)\, \alpha \in W$

(स) $a, b \in F; \alpha, \beta \in W \Rightarrow (ab)\, \beta \in W$

(द) उपर्युक्त में से कोई नहीं

The non-empty subset W of a vector space V(F) is a subspace if and only if ....

(a) $a, b \in F; \alpha, \beta \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$

(b) $a, b \in F; \alpha, \beta \in W \Rightarrow (ab)\, \alpha \in W$

(c) $a, b \in F; \alpha, \beta \in W \Rightarrow (ab)\, \beta \in W$

(d) None of the above

(vii) माना S सदिश समष्टि V(F) के सदिशों का एक समुच्चय है, तब S सदिश समष्टि V(F) का आधार कहलाता है, यदि

(अ) S रैखिकत: स्वतन्त्र हो एवं L(S) = V;

(ब) S रैखिकत: परतन्त्र हो एवं L(S) = V

(स) $L(S) \neq V$

(द) L(V) = S

Let S be the set of vector space V(F), then S be the basis of vector space V(F) if :

(a) S is linearly independent and L(S) = V

(b) S is linearly dependent and L(S) = V

(c) $L(S) \neq V$ (d) L(V) = S

(viii) जाति-शून्यता प्रमेय से,

(अ) $\rho(T) - \nu(T) = \dim U$

(ब) $\rho(T) + \nu(T) = \dim U$

(स) $\rho(T) = \dim U$

(द) $\nu(T) = \dim U$

By Rank-Nullity theorem,

(a) $\rho(T) - \nu(T) = \dim U$

(b) $\rho(T) + \nu(T) = \dim U$

(c) $\rho(T) = \dim U$

(d) $\nu(T) = \dim U$

(ix) किसी ऐकिक आव्यूह के आइगेन मान .... होते हैं।

(अ) दहाई मापांक (ब) सैकड़ा मापांक

(स) इकाई मापांक (द) इनमें से कोई नहीं

The eigen-value of a unitary matrix is of ....

(a) Tens Modulus (b) Thousands Modulus

(c) Unit Modulus (d) None of these

(x) आन्तर गुणन समष्टि में संयुग्मी सममित .... होती है।

(अ) $(\alpha, \beta) = (\alpha, \alpha)$ (ब) $(\alpha, \beta) = (\beta, \beta)$

(स) $(\alpha, \beta) = \overline{(\beta, \alpha)}$ (द) इनमें से कोई नहीं

In an inner product space conjugate symmetry will be ....

(a) $(\alpha, \beta) = (\alpha, \alpha)$ (b) $(\alpha, \beta) = (\beta, \beta)$

(c) $(\alpha, \beta) = \overline{(\beta, \alpha)}$ (d) इनमें से कोई नहीं

खण्ड 'ब' (Section 'B')

लघु उत्तरीय प्रश्न **5×3=15**

(Short Answer Type Questions)

नोट— सभी **पाँच** प्रश्न अनिवार्य हैं।

Note : *All the* ***five*** *questions are compulsory.*

1. माना G एक समूह है, तथा g, G का कोई स्थिर अवयव है, तब दर्शाइये कि प्रतिचित्रण

$$T_g : G \to G \text{ जो कि } T_g(x) = gxg^{-1}, \forall x \in G$$

से परिभाषित है, G का एक स्वाकारिता है।

Suppose G is a group and g is a fixed element of G. Then show that the mapping

$$T_g : G \to G \text{ defined by } T_g(x) = gxg^{-1}, \forall x \in G$$

is an automorphism of G.

अथवा / Or

यदि $G = (a)$ कोटि n का a से जनित कोई चक्रिय समूह हो, तो a^m समूह G का एक जनक होगा, यदि $0 < m < n$ तथा $(m, n) = 1$

If $G = (a)$ is a cyclic group of order n generated from a; then a^m is a generator of G if $0 < m < n$ and $(m, n) = 1$.

2. एक क्रम-विनिमेय वलय का प्रत्येक समाकारी प्रतिबिम्ब एक क्रम-विनिमेय वलय होता है।

Every homomorphic image of a cummutative ring is a commutative ring.

अथवा / Or

$x^5 + 2x^2 - x + 4$ को $x + 2$ से सांश्लेषिक भाजक विधि से भाग देने पर भागफल एवं शेषफल ज्ञात कीजिए।

Divide $x^5 + 2x^2 - x + 4$ by $x + 2$ by synthetic division method and find divident and remainder.

3. माना M तथा N कोई दो R-माड्यूल्स हैं। यदि $T : M \to N$ एक समाकारिता हो, तब सिद्ध कीजिए कि $T(0) = 0$

Suppore M and N are any two R-modules. If $T : M \to N$ is a homomorphism, then prove that $T(0) = 0$

अथवा / Or

यदि W_1 एवं W_2 किसी सदिश समष्टि V(F) की कोई दो उपसमष्टियाँ हों, तब रैखिक योग $W_1 + W_2$ भी समष्टि V(F) का एक उपसमष्टि होता है।

If W_1 and W_2 be any two subspaces of a vector space V (F), then the linear sum $W_1 + W_2$ is also a subspace of V(F).

4. सिद्ध कीजिए कि प्रतिचित्रण $f : V_2(R) \to V_3(R)$ जो कि $f(a, b) = (a + b, a - b, b)$ से परिभाषित है, एक रैखिक रूपान्तरण है।

Prove that the mapping $f : V_2(R) \to V_3(R)$ defined by $f(a, b) = (a + b, a - b, b)$ is a linear transformation.

अथवा / Or

यदि $T : V_2(R) \to V_2(R)$ एक समाकारिता है, जो निम्न रूप से परिभाषित है :

$$T(e_1) = (a, b), T(e_2) = (c, d)$$

जहाँ पर $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, तो T के लिए सूत्र ज्ञात कीजिए।

If $T : V_2(R) \to V_2(R)$ is a homomorphism which is defined by :

$$T(e_1) = (a, b), T(e_2) = (c, d)$$

where $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, then find the formula for T.

5. यदि सदिश $X_1 = [1, 1, 1]$, $X_2 = [2, 1, 2]$, $X_3 = [1, -2, 1] \in V_3(R)$, तब आन्तर गुणन (X_1, X_2), (X_2, X_3) तथा (X_3, X_1) की गणना कीजिए।

If vectors $X_1 = [1, 1, 1]$, $X_2 = [2, 1, 2]$, $X_3 = [1, -2, 1] \in V_3(R)$ then evaluate the inner product of (X_1, X_2), (X_2, X_3) and (X_3, X_1).

अथवा / Or

यदि α, β किसी आन्तर गुणन समष्टि V_2 (F) के सदिश है, तथा $a, b \in F$, तब सिद्ध कीजिए कि

$$\| a\alpha + b\beta \|^2 = | a |^2 \| \alpha \|^2 + a\bar{b}\,(\alpha, \beta) + \bar{a}b\,(\beta, \alpha) + | b |^2 \| \beta \|^2 .$$

If α, β are vectors of any inner product vector space $V_2(F)$ and $a, b \in F$, then prove that :

$$\| a\alpha + b\beta \|^2 = | a |^2 \| \alpha \|^2 + a\bar{b}\,(\alpha, \beta) + \bar{a}b\,(\beta, \alpha) + | b |^2 \| \beta \|^2 .$$

खण्ड 'स' (Section 'C')

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न **5×5=25**

(Long Answer Type Questions)

नोट— सभी **पाँच** प्रश्न अनिवार्य हैं।

Note : *All the* ***five*** *questions are compulsory.*

1. समूहों की समाकारिता की मूलभूत प्रमेय के कथन को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State the fundamental theorem of homomorphism of groups and prove it.

अथवा / Or

यदि G एक समूह हो, तो G पर परिभाषित सभी स्वाकारिताओं का समुच्चय A (G), फलनों के संयोजन के सापेक्ष एक समूह बनाता है।

If G is a group, then the set A(G) of all automorphism is a group with respect to composition of functions.

2. किसी वलय R का प्रत्येक समाकारी प्रतिबिम्ब अपने विभाग वलय के तुल्यकारी है। अर्थात् $\frac{R}{S} \cong R'$ जहाँ $\frac{R}{S}$ विभाग वलय, R एवं R′ वलय है।

Every homomorphic image of a ring R is isomorphic to quotient ring *i.e.*, $\frac{R}{S} \cong R'$ where $\frac{R}{S}$ is quotient ring, R and R′ are rings.

अथवा / Or

किसी समाकारिता का परास एक उपमाड्यूल होगा।

The range of any homomorphism will be a sub-module.

3. यदि S किसी सदिश समष्टि V (F) का कोई उपसमुच्चय हो, तो रैखिक विस्तृति [S] समष्टि V(F) का सबसे छोटा उपसमीष्ट होता है।

If S is a subset of any vector space V(F), then the linear span [S] is the smallest sub-space of V(F).

अथवा / Or

दिखाइये कि समुच्चय $S = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ $V_3(C)$ का आधार है। S के सापेक्ष $V_3(C)$ में सदिश $(3 + 4i, 6i, 3 + 7i)$ के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

Show that the set $S = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ is the basis of $V_3(C)$. Find the coordinates of the vector $(3 + 4i, 6i, 3 + 7i)$ in $V_3(C)$ with respect to S.

4. प्रतिचित्रण $f : V_2(R) \to V_2(R)$ जो $f(x, y) = (x^3, y^3)$ द्वारा परिभाषित है, की रैखिकता की जाँच कीजिए।

Verify the linearity of the function $f(x, y) = (x^3, y^3)$ where the mapping is $f : V_2(R) \to V_2(R)$.

अथवा / Or

सिद्ध कीजिए कि प्रतिचित्रण जो निम्न प्रकार से परिभाषित है, एक द्वि-एकघाती समघात है—

$$f(\alpha, \beta) = x_1 y_2 - x_2 y_1;$$

$$\alpha = (x_1, x_2), \beta = (y_1, y_2) \in R^2$$

Prove that the mapping which is defined by as follows, is a bilinear form :

$$f(\alpha, \beta) = x_1 y_2 - x_2 y_1;$$

$$\alpha = (x_1, x_2), \beta = (y_1, y_2) \in R^2$$

5. सदिशों $\alpha = (4, 3, 1, -2), \beta = (-2, 1, 2, 3) \in V_4(R)$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

Find the angle between the vectors

$$\alpha = (4, 3, 1, -2), \beta = (-2, 1, 2, 3) \in V_4(R).$$

अथवा / Or

आन्तर गुण समष्टि V में शून्येत्तर सदिशों का कोई लाम्बिक समुच्चय रैखिकत: स्वतन्त्र होता है।

Show that a set of non-zero orthogonal vectors of an inner product space is always linearly independent.

✪ ✪ ✪ ✪ ✪ c ✪ ✪ ✪ ✪ ✪